Sei G eine endliche Gruppe. Zeige: $G/_{[G,G]} \cong I_G/_{I_G^2}$.

Sei $\varphi: G \longrightarrow I_G/I_G^2$

$g \longmapsto (g-1) + I_G^2$

Beh.: φ ist ein Homomorphismus von Gruppen

Bew. d. Beh.:

Seien $g, h \in G$ bel. Dann gilt

$\varphi(g \cdot h) = (gh-1) + I_G^2$ und

$$\begin{aligned}
\varphi(g) + \varphi(h) &= (g-1) + (h-1) + I_G^2 \\
&\underset{\uparrow}{=} (g-1) + (h-1) + (g-1)\cdot(h-1) + I_G^2 \\
&\quad (g-1)\cdot(h-1) \in I_G^2 \\
&= g - 1 + h - 1 + gh - g - h + 1 + I_G^2 \\
&= gh - 1 + I_G^2 \\
&= \varphi(g \cdot h).
\end{aligned}$$

Da I_G (als $\mathbb{Z}$-Modul, also als additive Gruppe) erzeugt wird von $\{g-1 \mid g \in G\}$ ist φ surjektiv.

Da I_G/I_G^2 abelsch ist, muss gelten $[G,G] \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Somit induziert φ einen Gruppenepimorphismus

$\tilde{\varphi}: G/_{[G,G]} \longrightarrow I_G/I_G^2$.

$g[G,G] \longmapsto \varphi(g)$.

Beh.: $\tilde{\varphi}$ ist ein Isomorphismus von Gruppen

Bew. d. Beh.: Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{\varphi}$ injektiv ist.

Zeige dazu: $\tilde{\varphi}$ hat ein Linksinverses,

nämlich $\tilde{\psi}: I_G / I_G^2 \longrightarrow G/[G,G]$

$$\sum_{g \in G} a_g (g-1) + I_G^2 \longmapsto \prod_{g \in G} g^{a_g} \circ [G,G].$$

Zeige zuerst: $\tilde{\psi}$ ist wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus.

Wir zeigen dazu: 1) $\psi: I_G \longrightarrow G/[G,G]$

$$\sum_{g \in G} a_g (g-1) \longmapsto \prod_{g \in G} g^{a_g} \circ [G,G]$$

wohldef., weil $G/[G,G]$ abelsch, G endlich ✓

ist ein Homomorphismus von Gruppen und

2) $I_G^2 \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$.

Dann induziert ψ den Gruppenhomomorphismus $\tilde{\psi}$.

Zu 1) • ψ ist wohldefiniert:

Bemerke: Für ein beliebiges Tupel $(a_g)_{g \in G} \in \mathbb{Z}^{|G|}$ gilt:

$$\prod_{g \in G} g^{a_g} \circ [G,G] = \prod_{g \in G \setminus \{e_G\}} g^{a_g} \cdot [G,G].$$

Das heißt, ψ "sieht" den Koeffizienten a_{e_G} nicht.

Da $\{g-1 \mid g \in G \setminus \{e_G\}\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von I_G ist, gibt es für alle $x \in I_G$ ein eindeutig bestimmtes Tupel $(a_g)_{g \in G \setminus \{e_G\}} \in \mathbb{Z}^{|G|-1}$ mit

$$x = \sum_{g \in G \setminus \{e_G\}} a_g (g-1).$$

Da Ψ den Koeffizienten a_{e_G} nicht "sieht", folgt Wohldefiniertheit von Ψ.

- Ψ ist <u>Gruppenhomomorphismus</u>:

Für $x = \sum_{g\in G} a_g(g-1)$, $y = \sum_{g\in G} b_g(g-1) \in I_G$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\Psi(x+y) &= \Psi\Big(\sum_{g\in G}(a_g+b_g)(g-1)\Big)\\
&= \prod_{g\in G} g^{a_g+b_g}\cdot[G,G]\\
&= \prod_{g\in G} g^{a_g}\cdot\prod_{g\in G} g^{b_g}\cdot[G,G]\\
&= \Psi(x)\cdot\Psi(y)
\end{aligned}
$$

zu 2) I_G^2 wird (als additive Gruppe) erzeugt von $\{(g-1)(h-1) \mid g,h\in G\}$.

Für $g,h\in G$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\Psi((g-1)(h-1)) &= \Psi(gh+1-g-h)\\
&= \Psi((gh-1)-(g-1)-(h-1))\\
&= gh\cdot g^{-1}\cdot h^{-1}\cdot[G,G]\\
&= 1\cdot[G,G].
\end{aligned}
$$

Daher ist $\underline{I_G^2 \subseteq \operatorname{Ker}(\Psi)}$.

Ψ induziert also den Homomorphismus $\tilde{\Psi}$.

Da für $g\in G$ gilt: $\tilde{\Psi}(\tilde{\varphi}(g\cdot[G,G])) = \tilde{\Psi}((g-1)+I_G^2) = \Psi(g-1) = g\cdot[G,G]$,

ist $\tilde{\Psi}\circ\tilde{\varphi} = \mathrm{id}_{G/[G,G]}$.

Insbesondere muss $\tilde{\varphi}$ injektiv sein, $\tilde{\varphi}$ ist also ein Isomorphismus von Gruppen.