Übung 3

14. 5. 2020

<u>Aufgabe 1)</u> k Zahlkp.

J_k Gruppe der Idele

<u>Beh:</u> $k^\times = \iota_k(k^\times) \leq J_k$ ist diskrete Untergruppe.

<u>Bew:</u> Siehe [Neu, Satz <u>VI</u>, (1.5), S. 377].

Man kann die <u>Geschlossenheitsrelation</u> benutzen:

$$\prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} |a|_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\mathfrak{p}\mid\infty} |a|_{\mathfrak{p}}^{f_{\mathfrak{p}}} = 1, \quad \text{wobei}$$

$$f_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} 1, & \mathfrak{p} \text{ reell} \\ 2, & \mathfrak{p} \text{ komplex} \end{cases}$$

<u>Beweis hierzu:</u>

$$\prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} |a|_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(a)} = |N_{k|\mathbb{Q}}(a)|^{-1}$$

$$a\mathcal{O}_k = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(a)} \Rightarrow$$

$$|N_{k|\mathbb{Q}}(a)| = \mathfrak{N}(a\mathcal{O}_k) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \mathfrak{N}\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(a)}$$

<u>Bleibt zu zeigen:</u> $\prod_{\mathfrak{p}\mid\infty} |a|_{\mathfrak{p}}^{f_{\mathfrak{p}}} = |N_{k|\mathbb{Q}}(a)|$

<u>Dazu:</u> $\prod_{\mathfrak{p}\mid\infty} |a|_{\mathfrak{p}}^{f_{\mathfrak{p}}} = \prod_{\rho \text{ reell}} |\rho(a)| \cdot \prod_{\substack{(\sigma,\bar\sigma) \\ \sigma \text{ komplex}}} |\sigma(a)|^2 = |N_{k|\mathbb{Q}}(a)|$

Zur Diskretheit. Es genügt zu zeigen:

es gibt eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ der 1 mit

$$\mathcal{U} \cap k^\times = \{1\}$$

Beweis: Nimm

$$\mathcal{U} = \left\{ \alpha = (\alpha_v)_v \;\middle|\; \begin{array}{l} |\alpha_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = 1, \ \forall \mathfrak{p} \nmid \infty \\ |\alpha_v - 1|_v < 1, \ \forall v \mid \infty \end{array} \right\}$$

Annahme: $\alpha \in \mathcal{U} \cap k^\times$, $\alpha \neq 1$. Dann:

$$1 = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} |\alpha - 1|_\mathfrak{p} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid \infty} |\alpha - 1|_\mathfrak{p}^{f_\mathfrak{p}}$$

$$< \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} |\alpha - 1|_\mathfrak{p} \leq \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \max(|\alpha|_\mathfrak{p}, 1) = 1$$

$\lightning$

Aufgabe 2) S sei eine endliche Stellenmenge von k

Def.: $$J_k^S := \prod_{v \in S} k_v^\times \times \prod_{v \notin S} U_v \leq J_k$$

$$C_k^S := J_k^S k^\times / k^\times \leq C_k = J_k / k^\times$$

Beh: Falls S groß genug ist, so gilt $J_k^S k^\times = J_k$

Bew: Sei $h = h_k$ die Klassenzahl und

$\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_h$ Primideale, so daß

$$\mathcal{C}\ell_k = \{ [\mathfrak{p}_1], \dots, [\mathfrak{p}_h] \}$$

Sei $S = \{ \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_h \} \cup S_\infty$.

Dann gilt: $k^\times J_k^S = J_k$.

Denn: Sei $\alpha = (\alpha_v)_v \in J_k$.

Betrachte
$$J_k \xrightarrow{c} I_k$$
$$\beta = (\beta_v)_v \longmapsto \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\beta_\mathfrak{p})}$$

Es gilt: $[c(\alpha)] = [\mathfrak{p}_i]$ für genau ein i

d.h. $c(\alpha) = a\mathfrak{p}_i$ für ein $a \in k^\times$

Betrachte $\alpha' = \alpha a^{-1}$. Es gilt:

$$c(\alpha') = c(\alpha a^{-1}) = c(\alpha) a^{-1} = \mathfrak{p}_i$$

Also ist für $\mathfrak{p} \notin \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_h\}$ $v_\mathfrak{p}(\alpha'_\mathfrak{p}) = 0$.

d.h. $\alpha' \in J_k^S$. Somit

$$\alpha = \alpha a^{-1} \cdot a \in J_k^S \cdot k^\times$$

$\blacksquare$

<u>Zusatz:</u> 1) $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_h$ (ganze) Ideale mit

$$\{[\mathfrak{a}_1], \dots, [\mathfrak{a}_h]\} = Cl_k$$

Sei S' die Menge der Primideale, die in den $\mathfrak{a}_i$ vorkommen. Dann gilt die Aussage der Aufgabe für

$$S = S' \cup S_\infty .$$

2) Es genügt auch: $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ mit $\langle [\mathfrak{a}_1], \dots, [\mathfrak{a}_n] \rangle = Cl_k$.

<u>Aufgabe 3)</u>

$K = k(1)$ Hilbertscher Klassenkp.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, dash] \\ k \end{tikzcd} \quad G \simeq Cl_k$$

$$(\mathfrak{a}, K|k) \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{a} P_k = [\mathfrak{a}]$$

Sei $U_k = \prod_v U_v$ die Gruppe der Einheitsidele.

a)
$$\begin{tikzcd} J_k \arrow[r, two heads, "c"] \arrow[rr, bend right, "\bar{c}"'] & I_k \arrow[r, two heads] & I_k / P_k = Cl_k \end{tikzcd}$$

<u>Beh:</u> $\ker(\bar{c}) = k^\times U_k$

b) Bestimme den Kern von

$$(\_, k(\mathfrak{n})/k) : J_k \longrightarrow Gal(k(\mathfrak{n})/k)$$

<u>Zu a)</u> Es ist zu zeigen:

$$c(\alpha) \in P_k \iff \alpha = a\beta \,, \; a \in k^\times \,, \; \beta \in U_k$$

„$\Leftarrow$" $c(\alpha) = \underset{\uparrow}{c(a)}\, c(\beta)$

betrachtet als Hauptideal

$$= a\mathcal{O}_k \cdot \mathcal{O}_k = a\mathcal{O}_k \in P_k$$

„$\Rightarrow$" $c(\alpha) \in P_k$

$$\Rightarrow \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})} = a\mathcal{O}_k \text{ für ein } a \in k^\times$$

$$\Rightarrow \underset{\uparrow}{c(a)} = c(\alpha)$$

als Hauptideal

$$\Rightarrow \alpha = a \cdot \underbrace{\frac{\alpha}{a}}_{\in U_k} \in k^\times U_k \,.$$

Zu b) Hier $K|k$ abelsch, $\mathfrak{m}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{f}_{K|k}$

$$
\begin{tikzcd}
J_k(\mathfrak{m}) \big/ \left(k^\times N_{K|k}(J_K)\right)_{\mathfrak{m}} \arrow[rr, "\simeq", "c"'] \arrow[d, "\simeq"', "\text{Approximationssatz}"] \arrow[d, phantom, shift right=12ex, "="] & & I_k(\mathfrak{m}) \big/ P_k(\mathfrak{m}) N_{K|k}\left(I_K(\mathfrak{m})\right) = Cl_k \arrow[d, "(-,K|k)"', "\simeq"] \\
J_k \big/ k^\times \underbrace{N_{K|k}(J_K)}_{= U_k} \arrow[rr, dashed, "\Theta"] & & Gal(K|k) \\
J_k \arrow[u] \arrow[rru, dashed, "(-,K|k)"'] \arrow[uu, bend left=60, "\bar{c}"]
\end{tikzcd}
$$

$\ker(-,K|k) = \ker(\bar{c})$

mit a) folgt

$\ker(-,K|k) = k^\times U_k$

$$J_k(\mathfrak{m}) = \left\{ \alpha = (\alpha_v)_v \in J_k \;\middle|\; \alpha \equiv 1 \ (\mathrm{mod}^\times \mathfrak{m}) \right\}$$

$$v_{\mathfrak{p}}(\alpha_{\mathfrak{p}} - 1) \geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}_0), \quad \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0$$

$$\alpha_\sigma > 0, \quad \sigma \mid \mathfrak{m}_\infty$$

<u>Hier:</u> $K = k(1)$

$\mathfrak{m} = (1)$

K ist die <u>maximal</u> abelsche <u>unverzweigte</u> Erw. von k

Zusätze zu Aufgabe 1)

a) J_k ist hausdorffsch

b) $k^\times \leq J_k$ ist abgeschlossene Untergruppe

c) $\left.\begin{array}{l} G \text{ top. Gruppe, hausdorffsch} \\ H \leq G \text{ diskret} \end{array}\right\} \Rightarrow H$ abgeschlossen

$$\begin{array}{ccc}
I_k(1) = I_k & & k \\
\Big| & & \\
U & \longleftrightarrow & \text{unverzweigte Erweiterungen von } k \\
\Big| & & \\
P_k(1) = P_k & \longleftrightarrow & \text{maximal unverzweigte} \\
& & \text{also } k(1) = k
\end{array}$$