Übung 2

7.5.2020

Aufgabe 1)

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 \mathfrak{f}_\infty$$

$$\begin{aligned}\rho : \mathcal{O}_k^\times &\longrightarrow (\mathcal{O}_k/\mathfrak{f})^\times \\ u &\longmapsto \left(u \bmod \mathfrak{f}_0, \left(\operatorname{sign}_\sigma(u)\right)_{\sigma \mid \mathfrak{f}_\infty} \right)\end{aligned}$$

$$\mathcal{U} := \operatorname{image}(\rho) \leq (\mathcal{O}_k/\mathfrak{f})^\times$$

$$0 \to \mathcal{O}_k^\times \cap k_{\mathfrak{m}}^\times \to \mathcal{O}_k^\times \xrightarrow{\rho} (\mathcal{O}_k/\mathfrak{f})^\times \xrightarrow{\lambda} \mathcal{C}l_k(\mathfrak{f}) \longrightarrow \mathcal{C}l_k \longrightarrow 0$$

ist exakt

$$\Longrightarrow \quad 0 \longrightarrow (\mathcal{O}_k/\mathfrak{f})^\times / \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{C}l_k(\mathfrak{f}) \longrightarrow \mathcal{C}l_k \to 0$$

ist exakt.

$$\begin{tikzcd} k(\mathfrak{f}) \arrow[d, dash] \\ k(1) \arrow[d, dash] \\ k \end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Gal}(k(\mathfrak{f})|k) \simeq \mathcal{C}l_k(\mathfrak{f})$$

$$\operatorname{Gal}(k(1)|k) \simeq \mathcal{C}l_k$$

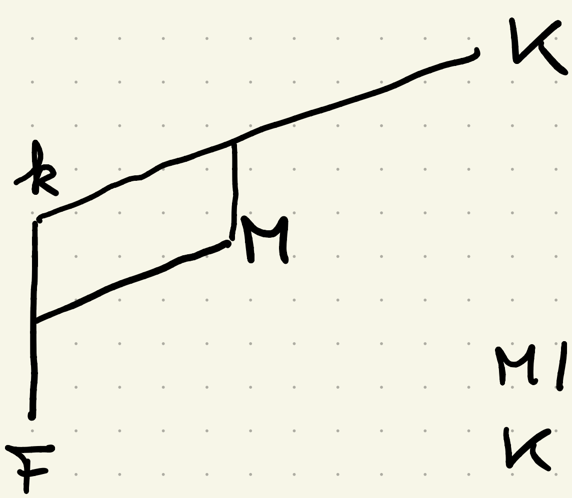
<u>Beh:</u> $\operatorname{Gal}(k(\mathfrak{f})/k(1)) \simeq \dfrac{(\mathcal{O}_k/\mathfrak{f})^\times}{\mathcal{U}}$

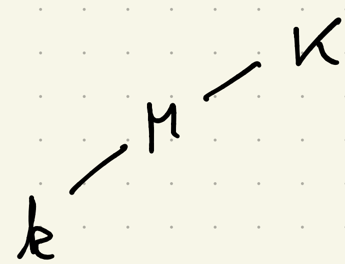
$$\begin{tikzcd}
 & & {[\mathfrak{a}]} \arrow[r, mapsto] & {[\mathfrak{a}]} & \\
0 \arrow[r] & (\mathcal{O}_k/\mathfrak{f})^\times/U \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\simeq"] & I_k(\mathfrak{f}) \arrow[r] \arrow[d, "{(-,k(\mathfrak{f})|k)}", "\simeq"'] & I_k \arrow[r] \arrow[d, "{(-,k(1)|k)}", "\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k(\mathfrak{f})|k(1)) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k(\mathfrak{f})|k) \arrow[r, "\mathrm{res}"] & \mathrm{Gal}(k(1)|k) \arrow[r] & 0 \\
 & & (\mathfrak{a}, k(\mathfrak{f})|k) \arrow[r, mapsto] & (\mathfrak{a}, k(1)|k) &
\end{tikzcd}$$

Noch zu zeigen: kommutiert

$$\begin{tikzcd}
k(\mathfrak{f}) \arrow[d, dash] \\
k(1) \arrow[d, dash] \\
k
\end{tikzcd}$$

Erinnerung:





$M\,|\,F$ abelsch

$K\,|\,k$ abelsch

Dann gilt: $(\mathfrak{a}, K|k)\big|_M = \left(N_{k|F}(\mathfrak{a}), M/F\right)$

Speziell für $F = k$:

$$(\mathfrak{a}, K|k)\big|_M = (\mathfrak{a}, M|k)$$

Also kommutiert das rechte Rechteck auch. ∎

Aufgabe 2)

k

$|\alpha| < \infty$

$\mathbb{Q}_p$

Beh: $k^{\times n} \leq k^\times$ ist offen und von endlichem Index.

Bew:

Bekannt: $k^\times \simeq \pi_k^{\mathbb{Z}} \times \mu_{q-1} \times \mu_{p^a} \times \mathbb{Z}_p^{[k:\mathbb{Q}_p]}$

$q = |\bar{k}|$

$\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{q-1} \times \mathbb{Z}/_{p^a} \times \mathbb{Z}_p^{[k:\mathbb{Q}_p]}$

$$k^{\times n} \simeq n\mathbb{Z} \times \frac{(n,q-1)\mathbb{Z}}{(q-1)\mathbb{Z}} \times \frac{(p^a,n)\mathbb{Z}}{p^a\mathbb{Z}} \times (n\mathbb{Z}_p)^{[k:\mathbb{Q}_p]}$$

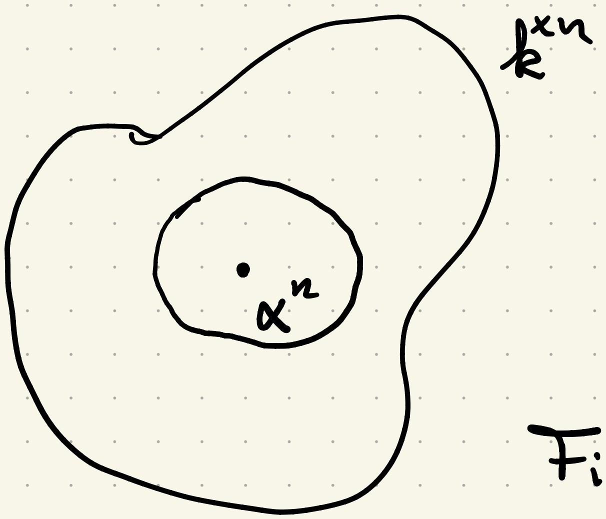
$$\Longrightarrow k^\times/k^{\times n} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(n,q-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p^a,n)\mathbb{Z} \times \left(\mathbb{Z}_p/n\mathbb{Z}_p\right)^d$$

$d = [k:\mathbb{Q}_p]$

$$\Longrightarrow [k^\times : k^{\times n}] = \underline{\underline{n \cdot (n,q-1) \cdot (p^a,n) \cdot p^{v_p(n)d}}} < \infty$$

$$\left(\text{da } \mathbb{Z}_p/n\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p/p^{v_p(n)}\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}/p^{v_p(n)}\mathbb{Z}.\right)$$

$k^{\times n}$ ist offen, <u>denn</u>:



Sei $\alpha^n \in k^{\times n}$. Finde $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha^n \left(1+\mathfrak{p}_k^N\right) \subseteq k^{\times n}$$

Finde also N, so daß

$$1+\mathfrak{p}_k^N \subseteq k^{\times n}$$

Es reicht also N zu finden mit

$$1+\mathfrak{p}_k^N \subseteq \left(1+\mathfrak{p}_k^s\right)^n \qquad (*)$$

<u>Erinnerung</u> [Neu, Satz 5.5]:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \log(1+z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$$

liefern für $s > \frac{e}{p-1}$ zueinander inverse Isom.

$$\mathfrak{p}_k^s \underset{\log}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} 1+\mathfrak{p}_k^s$$

$$\begin{array}{c} k \\ \Big| \, ef \\ \mathbb{Q}_p \end{array}$$

$$(*) \Leftrightarrow \mathfrak{p}_k^N \subseteq n \log\left(1+\mathfrak{p}_k^s\right) = n\,\mathfrak{p}_k^s$$

$$\overset{2}{\Longleftrightarrow} \quad \mathfrak{p}_k^{N} \subseteq n\,\mathfrak{p}_k^{s} = \mathfrak{p}_k^{s+e v_p(n)}$$

$$n\mathcal{O}_k = p^{v_p(n)}\mathcal{O}_k = \mathfrak{p}_k^{e v_p(n)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad N \geq s + e v_p(n) \qquad \blacksquare$$

<u>Bemerkung:</u> Sei $V \leq k^\times$. Dann gilt:

V offen von endlichem Index $\Longleftrightarrow$ V hat endlichen Index

<u>Beweis:</u> „$\Longrightarrow$" ✓

„$\Longleftarrow$" Sei $n := [k^\times : V]$. Dann $k^{\times n} \subseteq V$.

$$\Longrightarrow \quad V = \underbrace{\dot{\bigcup_{x \in V/k^{\times n}}} \underbrace{x\,k^{\times n}}_{\text{offen}}}_{\text{offen}} \qquad \blacksquare$$

Aufgabe 3)

$$\left.\begin{matrix} K \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{matrix}\right) \text{ ab.}, \quad \exp(\underbrace{\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}_p)}_{G}) = p$$

$$\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times / N_{K|\mathbb{Q}_p}(K^\times)$$

$$U := N_{K|\mathbb{Q}_p}(K^\times)$$

$$\exp(G) = \exp\left(\mathbb{Q}_p^\times / U\right) = p$$

$$\iff \mathbb{Q}_p^{\times p} \subseteq U$$

<u>Fazit:</u> Studiere U mit $\mathbb{Q}_p^{\times p} \subseteq U \subseteq \mathbb{Q}_p^\times$.

LKKT besagt, dass diese U genau den gesuchten Kp. entsprechen.

<u>$p \neq 2$</u>

$$\mathbb{Q}_p^\times = p^{\mathbb{Z}} \times \mu_{p-1} \times \underbrace{(1 + p\mathbb{Z}_p)}_{\simeq \mathbb{Z}_p}$$

$$\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{p-1} \times \mathbb{Z}_p$$

$$\mathbb{Q}_p^{\times p} \simeq p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{p-1} \times p\mathbb{Z}_p$$

$$\mathbb{Q}_p^\times \big/ \mathbb{Q}_p^{\times p} \;\simeq\; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Hier gibt es $p+1$ Untergruppen der Ordg p. Also gibt es $p+1$ echte Zwischenkp. vom Exponenten p.

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, dash, "p"'] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash, "p"] \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathbb{Q}_p^{\times p} \arrow[d, dash] & \\
K_1 \arrow[dr, dash, "p"'] & \cdots \arrow[d, dash, "p"] & K_{p+1} \arrow[dl, dash, "p"] & U \arrow[d, dash] & p+1 \\
 & \mathbb{Q}_p \arrow[rr, leftrightarrow] & & \mathbb{Q}_p^\times &
\end{tikzcd}$$

Sei E <u>die</u> unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ vom Grad p. Welches U gehört dazu?

<u>Bekannt</u>: $E \leftrightarrow U \iff U = N_{E|\mathbb{Q}_p}(E^\times)$

E unverzweigt $\iff N_{E|\mathbb{Q}_p}(U_E) = \mathbb{Z}_p^\times$

<u>Antwort</u>: $U = p^{p\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_p^\times$

$p=2$:
$$\mathbb{Q}_2^\times = 2^{\mathbb{Z}} \times \{\pm 1\} \times (1+4\mathbb{Z}_2)$$
$$\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$$
$$\mathbb{Q}_2^{\times 2} = 2\mathbb{Z} \times 0 \times 2\mathbb{Z}_2$$

Beachte: exp konvergiert auf $4\mathbb{Z}_2$, da
$$2 > \frac{e}{p-1} = \frac{1}{1}.$$

$$\Longrightarrow \mathbb{Q}_2^\times / \mathbb{Q}_2^{\times 2} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Hier gibt es 7 Untergruppen der Ordnung 2 und 7 Untergruppen der Ordnung 4.
Also gibt es $7+7=14$ echte Zwischengp. vom Exponenten 2

$$\begin{array}{c} K \\ | \\ L \\ | \\ F \\ |{\scriptstyle 2} \\ \mathbb{Q}_p \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{c} \mathbb{Q}_2^{\times 2} \\ | \\ V_2 \\ \vdots \\ U \\ |{\scriptstyle 2} \\ \mathbb{Q}_p^\times \end{array}$$

Weitere Übung:

k i.q. $\qquad f = f_0$

$\begin{array}{c} k \\ \big|2 \\ \mathbb{Q} \end{array}$

<u>Bew:</u> $\quad [k(f):k] = h_k \dfrac{w(f)}{w(1)} \Phi(f)$

$\mathfrak{a} \trianglelefteq \mathcal{O}_k, \quad w(\mathfrak{a}) := \#\{\varepsilon \in \mathcal{O}_k^\times \mid \varepsilon \equiv 1 \pmod{f}\}$

$\left(\Rightarrow \; w(1) = \#\mathcal{O}_k^\times\right)$

$\Phi(\mathfrak{a}) := \#\left(\mathcal{O}_k/\mathfrak{a}\right)^\times$

<u>Bew:</u>

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 \to & \mathcal{O}_k^\times \cap k_f^\times & \to & \mathcal{O}_k^\times & \to & \left(\mathcal{O}_k/f\right)^\times & \to & \ell_k(f) & \to & \ell_k & \to 0 \\ & - & & + & & - & & + & & - & \\ & w(f) & & w(1) & & \Phi(f) & & [k(f):k] & & h_k & \end{array}$$

$\blacksquare$