Übung 1

30. 4. 2020

Aufgabe 1)

$$k_m^\times = \{ \alpha \in k^\times \mid \alpha \equiv 1 \ (\mathrm{mod}^* m) \}$$

$$\varsigma : \{ \alpha \in k^\times \mid (\alpha, m_0) = 1 \} \twoheadrightarrow (\mathcal{O}_k / m)^\times$$

$$= \left(\mathcal{O}_k / m_0\right)^\times \times \{\pm 1\} \times \dots \times \{\pm 1\}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha \longmapsto \left(\underset{\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2^{-1}}{\overline{\alpha}}, \left(\mathrm{sgn}(\sigma(\alpha)) \right)_{\sigma \mid m_\infty} \right)$$

Zeige:

$$0 \to \mathcal{O}_k^\times \cap k_m^\times \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_k^\times \xrightarrow{\varsigma} (\mathcal{O}_k/m)^\times \xrightarrow{\lambda} Cl_k(m) \xrightarrow{\pi} Cl_k \to 0$$

$$\varsigma(\alpha) \longmapsto (\alpha) P_k(m)$$

ist exakt

$$\mathfrak{a} P_k(m) \mapsto \mathfrak{a} P_k$$

Wohldefiniertheit von λ:

Sei $\varsigma(\alpha) = \varsigma(\beta)$ mit $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, m_0) = (\beta, m_0) = 1$

z.z. $(\alpha) P_k(m) = (\beta) P_k(m)$ in $Cl_k(m)$.

$\iff (\alpha/\beta) \in P_k(m)$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathcal{O}_k^\times : \begin{cases} v_\mathfrak{y}\left(\varepsilon \frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \geq v_\mathfrak{y}(\mathfrak{m}_0), & \forall \mathfrak{y} \mid \mathfrak{m}_0 \\ \sigma\left(\varepsilon \frac{\alpha}{\beta}\right) > 0 & \forall \sigma \mid \mathfrak{m}_\infty \end{cases}$$

Man kann hier $\varepsilon = 1$ nehmen, weil $\rho(\alpha) = \rho(\beta)$ äquivalent ist zu

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} \quad \text{in } \left(\mathcal{O}_k/\mathfrak{m}_0\right)^\times$$

und
$$\operatorname{sgn}(\sigma(\alpha)) = \operatorname{sgn}(\sigma(\beta))$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} v_\mathfrak{y}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \geq v_\mathfrak{y}(\mathfrak{m}_0), & \forall \mathfrak{y} \mid \mathfrak{m}_0 \\ \sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) > 0 \end{cases}$$

<u>Bei $\mathcal{O}_k^\times \cap k_\mathfrak{m}^\times$:</u> klar, da σ = Inklusion.

<u>Bei $\mathcal{O}_k^\times$:</u> Sei $\alpha \in \mathcal{O}_k^\times \cap k_\mathfrak{m}^\times$. Dann gilt: $(\rho \circ \sigma)(\alpha) = \rho(\alpha) = \left(\bar{1}, (+1)_{\sigma \mid \mathfrak{m}_\infty}\right)$ aufgrund der Def. von $k_\mathfrak{m}^\times$. D.h. $\operatorname{im}(\sigma) \subseteq \ker(\rho)$.

Sei $\alpha \in \ker(\rho) \cap \mathcal{O}_k^\times \Rightarrow \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_0}$ und $\sigma(\alpha) > 0$

$\Rightarrow \alpha \in k_\mathfrak{m}^\times \cap \mathcal{O}_k^\times$

<u>Bei $(\mathcal{O}_k/\mathfrak{m})^\times$:</u> Sei $u \in \mathcal{O}_k^\times$. Dann gilt:

$$\lambda(\rho(u)) = (u)\,\mathcal{P}_k(\mathfrak{m}) = \mathcal{P}_k(\mathfrak{m}) \text{ in } \mathcal{C}\ell_k(\mathfrak{m}).$$

D.h. $\operatorname{im}(\lambda) \subseteq \ker(\rho)$

Sei umgekehrt $\rho(\alpha) \in \ker(\lambda)$, $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1}$,

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}_k$, beide teilerfremd zu $\mathfrak{m}_0$.

<u>Dazu:</u> $\rho(\alpha) \in \ker(\lambda)$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha) \in \mathcal{P}_k(\mathfrak{m})$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, \varepsilon \in \mathcal{O}_k^\times : \begin{cases} v_{\mathfrak{q}}(\varepsilon\alpha - 1) \geq v_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{m}_0), \ \forall \mathfrak{q} \mid \mathfrak{m}_0 \\ \sigma(\varepsilon\alpha) > 0, \ \forall \sigma \mid \mathfrak{m}_\infty \end{cases}$$

$$\overset{!}{\Longrightarrow} \quad \rho(\varepsilon^{-1}) = \rho(\alpha)$$

<u>Bei $\mathcal{C}\ell_k(\mathfrak{m})$:</u> Sei $\rho(\alpha) \in (\mathcal{O}_k/\mathfrak{m})^\times$.

Dann gilt: $(\pi \circ \lambda)(\rho(\alpha)) = \pi((\alpha)\,\mathcal{P}_k(\mathfrak{m}))$

$$= (\alpha)\,\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k \text{ in } \mathcal{C}\ell_k,$$

d.h. $\operatorname{im}(\lambda) \subseteq \ker(\pi)$.

Sei umgekehrt $\mathfrak{a}\,\mathcal{P}_k(\mathfrak{m}) \in \ker(\pi)$.

$\Rightarrow \mathfrak{a}\,\mathcal{P}_k = 1$ in $\mathcal{C}\ell_k$ $\Rightarrow \mathfrak{a} = \alpha\,\mathcal{O}_k$, $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$

Betrachte

$$\left(\left(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2^{-1}, \left(\operatorname{sgn}(\sigma(\alpha))\right)_{\sigma \mid m_\infty} \right) \in \left(\mathcal{O}_k / m \right)^\times \right.$$

$$\Vert$$

$$\rho(\alpha)$$

klar: $\lambda(\rho(\alpha)) = \mathfrak{a} P_k(m)$

Bei $\mathcal{C}\ell_k$: ZH I $\Longrightarrow$ in jeder Idealklasse $c \in \mathcal{C}\ell_k$ gibt ganze, zu einem gegebenen Ideal $n \trianglelefteq \mathcal{O}_k$ prime Ideale. Also gibt es in c ein (ganzes) zu m_0 primes Ideal $\mathfrak{a}$. Dann

$$\pi(\mathfrak{a} P_k(m)) = c.$$

Aufgabe 2) Zeige:

$$|\mathcal{C}\ell_k(m)| = h_k \cdot \frac{(\mathcal{O}_k/m)^\times}{[\mathcal{O}_k^\times : \mathcal{O}_k^\times \cap k_m^\times]}$$

Dazu:

Aufgabe 1 $\Longrightarrow$

$$0 \to \mathcal{O}_k^\times / \mathcal{O}_k^\times \cap k_m^\times \xrightarrow{\bar{s}} (\mathcal{O}_k/m)^\times \xrightarrow{\lambda} Cl_k(m) \to Cl_k \to 0$$

ist exakt

$\Longrightarrow$ Beh.

Noch zu zeigen: $\left| \mathcal{O}_k^\times / \mathcal{O}_k^\times \cap k_m^\times \right| < \infty$

Sei $u \in \mathcal{O}_k^\times$. Dann gilt:

$$u \in k_m^\times \iff \begin{cases} u \equiv 1 \pmod{m_0} \\ \& \\ \sigma(u) > 0, \ \forall \sigma \mid m_\infty \end{cases}$$

Sei nun $\mathcal{O}_k^\times = \langle \varepsilon_0, \underbrace{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r}_{\text{Fundamentaleinheiten}} \rangle$

ε_0: Erzeuger der EHW von k

$r = r_1 + r_2 - 1$

Dann gilt für alle $i \in \{0, \dots, r\}$:

$$\varepsilon_i^N \in k_m^\times, \text{ falls } 2 \mid N \text{ und } \underbrace{\varphi(m_0)}_{= \#(\mathcal{O}_k/m_0)^\times} \mid N$$

$$\Rightarrow \left[\mathcal{O}_k^\times : \mathcal{O}_k^\times \cap k_m^\times\right] \leq N^{r+1}$$

∎

Aufgabe 3)

$$\begin{array}{c} k \\ 2 \,| \\ \mathbb{Q} \end{array} \text{ reell } = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$$

$\infty_1 \longleftrightarrow \sigma_1 = id$

$\infty_2 \longleftrightarrow \sigma_2 : a + b\sqrt{d} \longmapsto a - b\sqrt{d}$

Sei $\mathcal{O}_k^\times = \{\pm 1\} \times \varepsilon^{\mathbb{Z}}$. Sei $m = \infty_1 \infty_2$

Z.z. $|Cl_k(m)| = \begin{cases} h_k, & \text{falls } N(\varepsilon) = -1 \\ 2h_k, & \text{falls } N(\varepsilon) = +1 \end{cases}$

Dazu: Aufgabe 1 $\Longrightarrow$

$$0 \longrightarrow \frac{\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}}{im(\rho)} \longrightarrow Cl_k(m) \longrightarrow Cl_k \to 0$$

wobei: $\rho : \mathcal{O}_k^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_k/m)^\times = \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$

klar: $\rho(-1) = (-1, -1)$

$\rho(\varepsilon) = (sgn(\sigma_1(\varepsilon)), sgn(\sigma_2(\varepsilon)))$

$$\begin{array}{c} N(\varepsilon) \\ \shortparallel \\ \sigma_1(\varepsilon)\sigma_2(\varepsilon) \end{array} \qquad = \begin{cases} (1, -1) \text{ oder } (-1, 1), & N\varepsilon = -1 \\ (1, 1) \text{ oder } (-1, -1) & N\varepsilon = +1 \end{cases}$$

$\Rightarrow im(\rho) = \begin{cases} \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \\ \langle (-1, -1) \rangle = \{(1,1), (-1,-1)\} \end{cases}$ ■