Übung 10 (Abstrakte Kummertheorie
Artin-Schreier-Theorie)

16.7.2020

Abstrakte Kummertheorie

G pro-endliche Gruppe, A stetiger G-Modul d.h. (G, A) Formation

Axiom: $H^{-1}(L|K, A_L) = 1$ für alle zyklischen $L|K$

$$\begin{array}{c} H^{-1}(L|K, A_L) \\ \text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ H^1(L|K, A_L) \end{array}$$

"HS 90 in der klassischen Form". Genauer

Satz: L/K zyklisch, $\beta \in L^\times$. Dann gilt:

$$N_{L|K}(\beta) = 1 \iff \exists \alpha \in L^\times : \beta = \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$$

Hierbei: $Gal(L|K) = \langle \sigma \rangle$.

Sei $\wp : A \twoheadrightarrow A$, $a \mapsto \wp(a) = a^\wp$, ein surjektiver stetiger G-Homom., d.h. $\wp(\sigma(a)) = \sigma\,\wp(a)$, $\forall \sigma \in G$, $a \in A$. mit endlichem und zyklischen Kern $\mu_\wp$.

Standardbeispiele

1) k^{sep}/k, $(char(k), n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

$G := Gal(k^{sep}/k)$, $A = (k^{sep})^\times$

$\wp = \_^n : (k^{sep})^\times \to (k^{sep})^\times$, $\alpha \mapsto \alpha^n$

$\mu_\wp = \mu_n$ n-te EHW

2) $\mathrm{char}(k) = p > 0$, k^{sep}/k, $A = k^{sep}$

$G = \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$

$$\wp : k^{sep} \longrightarrow k^{sep}$$
$$a \longmapsto a^p - a$$

Das ist ein Hom., weil:

$$\wp(a+b) = (a+b)^p - (a+b) = a^p + b^p - a - b$$
$$= \wp(a) + \wp(b)$$

Sei α eine Nst. von $X^p - X - a$

$\Longrightarrow$ $\alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+(p-1)$ sind die Nullstellen von $X^p - X - a$, <u>denn:</u>

$i \in \mathbb{F}_p$, $$(\alpha+i)^p - (\alpha+i) - a = \alpha^p + \underbrace{i^p}_{=i} - \alpha - i - a$$
$$= \alpha^p - \alpha - a = 0.$$

Diese sind paarweise verschieden.

Das Axiom ist erfüllt, weil L c.t. als $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist (Grund: Satz von der NB)

$$\begin{tikzcd} k^{sep} \arrow[d, dash] \\ L \arrow[d, dash] \\ K \arrow[d, dash] \\ k \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Artin-Schreier-Theorie

Lemma: Es gibt K mit $\mu_p \subseteq A_K$

Beweis: Sei $\xi \in \mu_p \subseteq A$. $\Rightarrow \exists K$ mit $\xi \in A^{G_K} = A_K$
(Stetigkeit)

Sei $\mu_p = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ und $\xi_i \in A_{K_i}$.

$\Rightarrow \mu_p \in A_K$ mit $G_K = G_{K_1} \cap \dots \cap G_{K_n}$

"d.h. wir gehen zum Kompositum der Kp. über".

∎

Sei K ein Körper mit $\mu_p \subseteq A_K$.

Sei $B \subseteq A$ eine Teilmenge.

Def.: $K(B) = \bar{k}^H$ mit $H = \{\sigma \in G_K \mid b^\sigma = b, \forall b \in B\}$

Hierbei: $\bar{k}$ ist der Index=Körper mit $G_{\bar{k}} = \{1\}$

k ist der Index=Körper mit $G_k = G$

$$\begin{array}{c} \bar{k} \\ | \\ K \\ | \\ k \end{array} \qquad \bar{k} \,\Big|\, K : G_K$$

Bem: B G_K-invariant $\Rightarrow K(B)|K$ ist galoissch

d.h. für $b \in B$ und $\sigma \in G_K$ gilt: $\sigma(b) \in B$.

Bew: Z.z.: $H \lhd G_K$ Dazu:

$\sigma \in G_K$, $h \in H \Rightarrow (\sigma^{-1} h \sigma)(b) = \sigma^{-1}(h(\underbrace{\sigma(b)}_{\in B})) = \sigma^{-1}(\sigma(b)) = b$. ∎

Def.: Eine (formale) Kummererweiterung bezgl. $\wp$ ist eine Erweiterung der Form

$$K(\wp^{-1}(\Delta)) / K$$

wobei $\Delta \subseteq A_K = A^{G_K}$.

Im Standardbeispiel: $\Delta \subseteq K^\times$; $\mu_n \subseteq K$

$K(\sqrt[n]{\Delta}) / K$ ist klassische Kummererweiterung

Beobachtungen:

1) $K(\wp^{-1}(\Delta))/K$ ist galoissch, denn:

$$\left.\begin{array}{l} a \in \wp^{-1}(\Delta), \text{ also } \wp(a) = d \in \Delta \\ \sigma \in G_K \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{d \text{, da } \Delta \subseteq A_K}{\overset{\shortparallel}{\sigma(d)}} = \sigma(\wp(a)) = \wp(\sigma(a))$$

$$\Rightarrow \sigma(a) \in \wp^{-1}(\Delta)$$

2) $\mathrm{Gal}(K(\wp^{-1}(\Delta))/K)$ ist abelsch vom Exponenten $n = \#\mu_\wp$, denn:

Für $a \in A_K$ ist

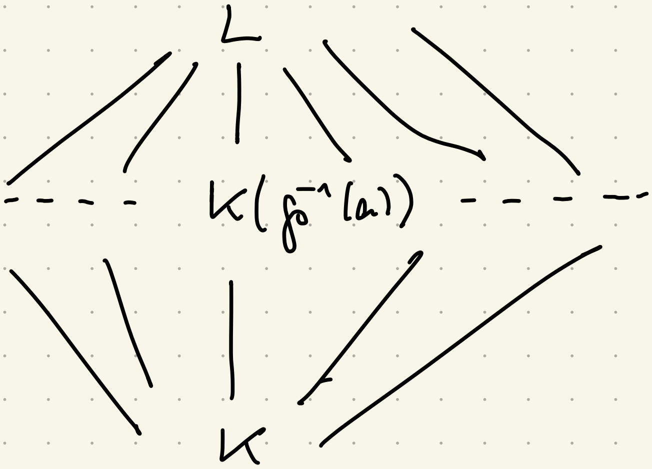
$$G(K(\wp^{-1}(a))/K) \hookrightarrow \mu_\wp, \quad \sigma \mapsto \sigma\alpha - \alpha$$

ist wohldefiniert (da $\mu_\wp \subseteq A_K$) und injektiv. wobei $\wp(\alpha) = a$

Für $L = K(\wp^{-1}(\Delta)) = \prod_{a\in\Delta} K(\wp^{-1}(a))$

folgt

$$G_{L|K} \hookrightarrow \prod_{a\in\Delta} \mathrm{Gal}\big(K(\wp^{-1}(a))/K\big) \hookrightarrow \prod_{a\in\Delta} \mu_\wp$$



abelsch vom Exponenten n ∎

Im Standbeispiel: $\mu_n \subseteq K$, $\wp(a) = a^n$

$K(\wp^{-1}(a)) = K(\sqrt[n]{a})$.

<u>Satz:</u> Sei L/K abelsch vom Exponenten n, $\mu_\wp \subseteq A_K$. Dann ist $L = K(\wp^{-1}(\Delta))$ mit $\Delta = \wp(A_L) \cap A_K$. Ist $L|K$ sogar zyklisch vom Exponenten n, so ist $L = K(\alpha)$ mit $\wp(\alpha) = a \in A_K$.

<u>Im Beispiel:</u> $L = K(\sqrt[n]{\Delta})$ mit $\Delta = (L^\times)^n \cap K^\times$.

<u>Beweis:</u> Das ist Prop. 8.1.1 und 8.1.3 im Protokoll WS 19/20 in der klassischen Kummertheorie. Quelle: HS 20 ∎

Hauptsatz der Kummertheorie Die Zuordnung

$$\Delta \longrightarrow L = K(\wp^{-1}(\Delta))$$

ist eine 1-1-Korrespondenz zwischen Gruppen Δ mit $\wp(A_K) \leq \Delta \leq A_K$ und den abelschen Erweiterungen L/K vom Exponenten n. Es gilt dann $\Delta = \wp(A_L) \cap A_K$ und erhält einen kanonischen Kummerisomorphismus

$$\Delta / \wp(A_K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\underset{\substack{\parallel \\ G_{L|K}}}{\mathrm{Gal}(L|K)}, \mu_\wp)$$

$$a + \wp(A_K) \longmapsto \left(\sigma \longmapsto \sigma(\alpha) - \alpha, \text{ falls } \wp(\alpha) = a\right).$$

ohne Beweis

Konsequenz: Wende $\mathrm{Hom}(-, \mu_\wp)$ an

$$\Longrightarrow \quad G_{L|K} \simeq \mathrm{Hom}(\Delta/\wp(A_K), \mu_\wp)$$

Zur Artin-Schreier-Theorie

$\mu_p = \{1\}$

$\mathrm{char}(k) = p > 0$, $\wp: k^{sep} \to k^{sep}$

$$a \mapsto a^p - a$$

Hilbert Satz 90 (additive Form) Sei $K|k$ zyklisch vom Grad n mit $\mathrm{Gal}(K|k) = \langle\sigma\rangle$. Sei $\beta \in K$. Dann gilt:

$$\mathrm{Tr}_{K|k}(\beta) = 0 \iff \exists\, \alpha \in K : \beta = \sigma(\alpha) - \alpha.$$

Satz: Sei $\mathrm{char}(k) > 0$.

(i) Sei K/k zyklisch vom Grad p. Dann gibt es $\alpha \in K$ mit $K = k(\alpha)$ und $\alpha^p - \alpha = a \in k$.

(ii) Umgekehrt, hat für $a \in k$ das Polynom
$$f(X) = X^p - X - a$$
eine Nst. in k (und dann sind alle Nst. in k) oder ist irreduzibel. Im zweiten Fall ist $k(\alpha)/k$ zyklisch vom Grad p, wobei $f(\alpha) = 0$.

Literatur: S. Lang, Algebra, $\underline{\text{VI}}$, §6 – 8

Beweis: (i) $\mathrm{Tr}_{L/K}(+1) = (+1) + \dots + (+1) = 0$

$\overset{\text{HS 90}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, \alpha \in K: \quad \sigma(\alpha) - \alpha = 1$

$\Rightarrow \quad \sigma(\alpha) = \alpha + 1 \quad \Rightarrow \sigma^i(\alpha) = \alpha + i, \; i = 1, \dots, p$

Diese Werte sind paarweise verschieden

$\Rightarrow [k(\alpha) : k] \geq p \quad \Rightarrow k(\alpha) = K$

Betrachte
$$\begin{aligned} \sigma(\alpha^p - \alpha) &= \sigma(\alpha)^p - \sigma(\alpha) \\ &= (\alpha+1)^p - (\alpha+1) \\ &= \alpha^p + 1 - \alpha - 1 = \alpha^p - \alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha^p - \alpha \in k$

(ii) Sei α Nst. von $f(X) = X^p - X - a$

$\Rightarrow \{\alpha + i \mid 1 \le i \le p\}$ ist die Gesamtheit der Nullstellen

paarweise verschieden

$\alpha \in k \Rightarrow$ alle Nst. sind in k

$\alpha \notin k \Rightarrow$ keine der Nst. liegt in k

Angenommen $f(X) = g(X)\,h(X)$ mit $1 \le \underset{=}{\deg}(g) < p$ d

$$\Rightarrow g(X) = \prod_{\text{gewisse } i} (X - (\alpha + i)) \text{, } d \text{ Faktoren}$$

$$= X^d - sX^{d-1} + \ldots \in k[X]$$

$$\text{mit } s = \sum_i (\alpha + i) = d\alpha + \underbrace{\sum_i i}_{\in k}$$

$$\Rightarrow \alpha \in k \;\lightning$$

Also ist $f(X)$ irreduzibel.

$k(\alpha)\,|\,k$ ist offensichtlich normal und separabel

$\Rightarrow k(\alpha)\,|\,k$ ist galoissch und $\mathrm{Gal}(k(\alpha)\,|\,k)$ ist erzeugt von σ mit $\sigma(\alpha) = \alpha + 1$, bzw. $\sigma^i(\alpha) = \alpha + i$. ∎