LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley

Sommersemester 2020

5. Juli 2020

Algebraische Zahlentheorie II
Übungsblatt 9

Aufgabe 1
Vervollständigen Sie den Beweis zur letzten Aufgabe des letzten Übungsblatts. Insbesondere Teil d) ist noch weitgehend offen.

Hier nochmals die (korrigierte) Aufgabenstellung.

Sei $G = \widehat{\mathbb{Z}}$ und $G_n = n\widehat{\mathbb{Z}}$.

a) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}/n\widehat{\mathbb{Z}}$.

b) G wird zur topologischen Gruppe, indem wir die G_n als Basis der offenen Umgebungen der 0 nehmen. Zeigen Sie: $\mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ ist eine dichte Untergruppe.

c) Sei A ein G-Modul. Der kanonische Erzeuger $1 \in \mathbb{Z}$ definiert einen Automorphismus F von A. Zeigen Sie: Falls A ein stetiger G-Modul ist, so gibt es zu jedem $a \in A$ eine natürliche Zahl n, so dass $F^n a = a$ gilt.

d) Sei $A' := \{a \in A \mid \exists n > 0 \text{ so dass } (1 + F + \ldots + F^{n-1})a = 0\}$. Definiere

$$H^q(G, A) := \varinjlim H^q(G/G_n, A^{G_n})$$

für $q \geq 1$ und zeigen Sie $H^1(G, A) \simeq A'/(F-1)A$.

Aufgabe 2
Sei $K/\mathbb{Q}_p$ ein p-adischer Zahlkörper. Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl m die Untergruppe $(K^\times)^m$ offen von endlichem Index in $K^\times$ ist.

Aufgabe 3
Sei $L/K/\mathbb{Q}_p$ ein Körperturm mit $[L : \mathbb{Q}_p] < \infty$. Zeigen Sie, dass die Normengruppe $N_{L/K}(L^\times)$ eine offene Untergruppe von $K^\times$ von endlichem Index ist.

Es ist derzeit keine Abgabe der Übungsblätter geplant. Wir werden Teile des Übungsblattes in der Übung besprechen, zu ausgewählten Aufgaben wird es auch Lösungsvorschläge online geben.