LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley
Sommersemester 2020
24. Juni 2020

Algebraische Zahlentheorie II
Übungsblatt 8

Aufgabe 1
Sei L/K eine endliche Galoissche Erweiterung mit Gruppe G. Zeigen Sie den Satz von Hilbert-Noether, meist einfach Hilbert Satz 90 genannt:

$$H^1(G, L^\times) = 1.$$

Hinweis: Für einen 1*-Kozykel* $a\colon G \longrightarrow L^\times$ *und* $c \in L^\times$ *betrachte man* $b := \sum_{\sigma\in G} a(\sigma)\sigma(c)$.

Aufgabe 2
Führen Sie den Beweis zu Lemma 3.11 aus dem Skript von Pascal Stucky:
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $G \times A \to A$ ist stetig, wobei A mit der diskreten Topologie versehen ist.

(2) Für jedes $a \in A$, ist
$$G_a := \{\sigma \in G \mid \sigma(a) = a\}$$
eine offene Untergruppe von G.

(3) $A = \bigcup_U A^U$, wobei U die Menge der offenen Untergruppen durchläuft.

Aufgabe 3
Sei $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ und $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ die absolute Galoisgruppe. Zeigen Sie: $G_{\mathbb{Q}}^{ab} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^\times$, wobei hier $\widehat{\mathbb{Z}}$ den Prüferring bezeichnet.
Hinweis: Satz von Kronecker-Weber.

Aufgabe 4
Sei $G = \widehat{\mathbb{Z}}$ und $G_n = n\widehat{\mathbb{Z}}$.

a) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}/n\widehat{\mathbb{Z}}$.

b) G wird zur topologischen Gruppe, indem wir die G_n als Basis der offenen Umgebungen der 0 nehmen. Zeigen Sie: $\mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ ist eine dichte Untergruppe.

c) Sei A ein G-Modul. Der kanonische Erzeuger $1 \in \mathbb{Z}$ definiert einen Automorphismus F von A. Zeigen Sie: A ist genau dann ein stetiger G-Modul, wenn es zu jedem $a \in A$ eine natürliche Zahl n gibt, so dass $F^n a = a$ gilt.

d) Sei $A' := \{a \in A \mid \exists n > 0 \text{ so dass } (1 + F + \ldots + F^{n-1})a = 0\}$. Definiere
$$H^q(G, A) := \varinjlim H^q(G/G_n, A^{G_n})$$
und zeigen Sie $H^0(G, A) = A^G$ und $H^1(G, A) \simeq A'/(F-1)A$.

Es ist derzeit keine Abgabe der Übungsblätter geplant. Wir werden Teile des Übungsblattes in der Übung besprechen, zu ausgewählten Aufgaben wird es auch Lösungsvorschläge online geben.