



Prof. Dr. Werner Bley
18. Juni 2020

Sommersemester 2020

Algebraische Zahlentheorie II Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Definition Sei A eine abelsche Gruppe und $f, g: A \rightarrow A$ Endomorphismen von A mit der Eigenschaft $f \circ g = g \circ f = 0$. Dann definiert man

$$q_{f,g}(A) := \frac{(\ker(f) : \text{im}(g))}{(\ker(g) : \text{im}(f))},$$

falls beide Indizes endlich sind.

Sei nun $G = \langle \sigma \rangle$ eine zyklische Gruppe, A ein G -Modul und

$$\begin{aligned} D &: A \rightarrow A, & a &\mapsto (\sigma - 1)a, \\ N &: A \rightarrow A, & a &\mapsto N_G a. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: $h(A) = q_{D,N}(A)$.

Aufgabe 2

Sei $f = 0$ und $g = n$ die Multiplikation mit der natürlichen Zahl n . Sei G zyklisch von Ordnung n und A ein trivialer G -Modul. Zeigen Sie: $h(A) = q_{0,n}(A)$.

Bemerkung: Falls $|G| = p$, so ist $q_{0,p}$ gerade die Funktion φ aus der Vorlesung.

Aufgabe 3

Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Zeigen Sie:

- Wenn zwei der Quotienten $q_{0,n}(A)$, $q_{0,n}(B)$ und $q_{0,n}(C)$ existieren, so auch der dritte.
- $q_{0,n}(B) = q_{0,n}(A)q_{0,n}(C)$.

Hinweis: Nutzen Sie hierzu das Schlangenlemma.

Aufgabe 4

Seien f, g zwei miteinander vertauschbare Endomorphismen der abelschen Gruppe A . Dann gilt:

$$q_{0,fg}(A) = q_{0,f}(A)q_{0,g}(A),$$

was wieder so zu verstehen ist, dass alle drei Quotienten definiert sind, wenn nur zwei unter ihnen definiert sind. *Hinweis: Betrachte Sie das kommutative Diagramm:*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & g(A) \cap \ker(f) & \longrightarrow & g(A) & \xrightarrow{f} & fg(A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & f(A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Aufgabe 5

Sei $G = \langle \sigma \rangle$ eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung p . Zeigen Sie: Ist $q_{0,p}(A)$ definiert, so auch $q_{0,p}(A^G)$ und es gilt:

$$h(A)^{p-1} = q_{0,p}(A^G)^p / q_{0,p}(A).$$

Hinweise: Die Aufgaben sind vollständig in Neukirchs Buch behandelt. Die Aufgaben 1-4 sollten mit den Hinweisen ohne zu Hilfenahme des Buches machbar sein. Ich bitte um Meldung, falls jemand eine dieser Aufgaben vorführen möchte. Die fünfte Aufgabe wird ausführlich in der Übung besprochen.