Prof. Dr. Werner Bley Sommersemester 2020

4. Juni 2020

Algebraische Zahlentheorie II
Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Sei G eine endliche Gruppe und $U \leq G$. Sei A ein G-Modul. Wir definieren

$$\mathrm{Res}_0 \colon H^0(G, A) \longrightarrow H^0(U, A), \quad a + N_G A \mapsto a + N_U A.$$

a) Zeige, dass Res_0 wohldefiniert ist.

b) Zeige: Ist

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

eine exakte Sequenz von G-Moduln, so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^0(G,C) & \xrightarrow{\delta} & H^1(G,A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_1} \\ H^0(U,C) & \xrightarrow{\delta} & H^1(U,A) \end{array}$$

c) (Optional) Studieren Sie Definition (4.9) im Buch "Klassenkörpertheorie" von Neukirch. Falls diese Aufgabe in der Übung behandelt werden soll, so ist ein Vortragender gesucht.

Aufgabe 2
Sei G eine endliche Gruppe und $U \leq G$. Zeigen Sie: Die durch

$$\mathrm{Kor}_{-2} : H^{-2}(U, \mathbb{Z}) \to H^{-2}(G, \mathbb{Z})$$

induzierte Abbildung

$$\varphi : U^{ab} \to G^{ab}$$

ist der kanonische Homomorphismus, den man durch $gU' \mapsto gG'$ erhält, wobei U' bzw. G' die Kommutatoruntergruppe von U bzw. G sind.

Aufgabe 3
Sei L/K eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G, $U \leq G$ und $F := L^U$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Kor}_0 : H^0(U, L^\times) \to H^0(G, L^\times) \text{ bzw. } \mathrm{Kor}_0 : H^0(U, L) \to H^0(G, L)$$

durch die Norm $\mathrm{N}_{F/K}$ bzw. die Spur $\mathrm{Tr}_{F/K}$ induziert werden.

Es ist derzeit keine Abgabe der Übungsblätter geplant. Wir werden Teile des Übungsblattes in der Übung besprechen, zu ausgewählten Aufgaben wird es auch Lösungsvorschläge online geben.