Prof. Dr. Werner Bley

Sommersemester 2017

28. Mai 2020

# Algebraische Zahlentheorie II
# Übungsblatt 5

**Aufgabe 1**

Sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von $G$-Moduln.

a) Zeigen Sie, dass die induzierte Sequenz $0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G$ exakt ist.

b) Sei $\delta_G$ das Kompositum $C^G \longrightarrow C^G/N_G C = H^0(G,C) \xrightarrow{\delta_0} H^1(G,A)$. Zeigen Sie, dass

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \xrightarrow{\delta_G} H^1(G,A) \longrightarrow H^1(G,B) \longrightarrow H^1(G,C) \xrightarrow{\delta_1} H^2(G,A) \longrightarrow \dots$$

exakt ist.

c) Zeigen Sie: Falls $A$ $\mathbb{Z}[G]$-projektiv ist, so ist $0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \xrightarrow{\delta_G} 0$ exakt.

**Aufgabe 2**

Sei $L/K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G$. Wir betrachten die additive Gruppe $L^+$ von $L$ als $G$-Modul. Zeigen Sie: $H^q(G, L^+) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

(Hinweis: Satz von der Normalbasis)

**Aufgabe 3**

Sei $L/\mathbb{Q}$ eine quadratische Erweiterung mit Galoisgruppe $G$, $\mu_L$ die Gruppe der Einheitswurzel in $L^\times$ und $I_L$ die Gruppe der gebrochenen Ideale. Berechnen Sie für $q = -1, 0$ die Kohomologiegruppen $H^q(G, \mathcal{O}_L), H^q(G, \mathcal{O}_L^\times), H^q(G, \mu_L)$ und $H^q(G, I_L)$.

*Bemerkung:* In der Vorlesung werden wir zeigen, dass für eine zyklische Gruppe $G$ und jeden $G$-Modul $A$ die Kohomologie periodisch vom Grad zwei ist, d.h. $H^q(G,A) \simeq H^{q+2}(G,A)$.

**Aufgabe 4**

Sei $L/K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Gruppe $G$. Zeige: $H^{-1}(G, L^\times) = 0$.

Es ist derzeit keine Abgabe der Übungsblätter geplant. Wir werden Teile des Übungsblattes in der Übung besprechen, zu ausgewählten Aufgaben wird es auch Lösungsvorschläge online geben.