*Aufgrund des Wunschs von Studierenden nach zusätzlichem Übungsmaterial zur Klausurvorbereitung sind hier die Klausuraufgaben zu meiner Vorlesung Analysis 1 vom WS 2004/05 zusammengestellt (inkl. Aufgaben der Probeklausur vom Dezember 2012). Lösungen dazu werden nicht veröffentlicht.* *F. Merkl, 23. Januar 2013*

## Aufgaben der Zwischenklausur Analysis 1 vom WS 2004/05

**Aufgabe 1.** a) Definieren Sie für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{C}$ die Aussage „$\lim_{n\to\infty} a_n = x$“.
b) Wenden Sie *direkt* diese Definition an, um

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+i} = 1$$

zu zeigen.

**Aufgabe 2.** a) Definieren Sie für $M \subseteq \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{C}$: „$x$ ist innerer Punkt von $M$“.
b) Wenden Sie *direkt* diese Definition an, um zu zeigen, dass die imaginäre Einheit $i$ ein innerer Punkt von $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ ist.

**Aufgabe 3.** a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in \mathbb{R}$. Charakterisieren Sie die Aussage „$f$ ist stetig in $x$“auf drei verschiedene Weisen.
b) Wenden Sie *direkt* eine dieser drei Charakterisierungen an, um zu zeigen, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|}$$

stetig in 0 ist.

**Aufgabe 4.** a) Definieren Sie für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ die Aussage: „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge“.
b) Wenden Sie diese Definition *direkt* an, um zu zeigen, dass die Folge

$$\left( \sum_{k=0}^{n} \exp(-k + ik^2) \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchyfolge ist.

**Aufgabe 5.** a) Definieren Sie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Aussage „$f$ ist gleichmäßig stetig“.
b) Verwenden Sie diese Definition, um zu zeigen, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 6.** a) Formulieren Sie den Satz von der dominierten Konvergenz für Reihen.
b) Zeigen Sie die Existenz von

$$x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left( -n + \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}} \right).$$

Berechnen Sie $x$.

**Aufgabe 7.** a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Definieren Sie das Supremum $\sup A$.
b) Es seien $A \subseteq [0, +\infty[$ und $B \subseteq [0, +\infty[$ nichtleere, nach oben beschränkte Mengen. Wir setzen $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

**Aufgabe 8.** a) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Definieren Sie die Aussage „$M$ ist kompakt“.
b) Wenden Sie *direkt* diese Definition an, um zu zeigen, dass

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\}$$

kompakt ist.

**Aufgabe 9.** Berechnen Sie

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{1+e^x}}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 10.** a) Formulieren Sie eine Version des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.

b) Leiten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2} dt$ nach $x$ ab.

**Aufgabe 11.** a) Definieren Sie für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Aussage

„$(f_n)$ konvergiert gleichmäßig gegen $g$ für $n \to \infty$."

b) Zeigen Sie, dass die Folge der Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(t) = \frac{t}{2+(nt)^2}$$

für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 12.** Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\, dx$$

**Aufgabe 13.** Zeigen Sie für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$:

$$\cot(x) = \frac{1}{x} + ax + o(x)$$

für $x \to 0$. Identifizieren Sie $a$.

**Aufgabe 14.** Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Hyperbel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ im Punkt $(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$. Das Ergebnis sollte die Form $y = ax + b$ haben.

**Aufgabe 15.** a) Formulieren Sie den Satz von Rolle.

b) Seien $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es gelte $g' < h'$. Zeigen Sie: Die Gleichung $g(t) = h(t)$ besitzt höchstens eine Lösung $t \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 16.** a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung (allgemeine Version).

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$f(0) = \lim_{h\to 0} \int_{-1}^{1} \tfrac{3}{2}\, f(hx)\, x^2\, dx$$

**Aufgabe 17.** a) Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge und $w$ eine komplexe Zahl. Definieren Sie die Aussage

„$w$ ist ein Berührpunkt von $A$ “.

b) Beweisen Sie: Die imaginäre Einheit $i$ ist ein Berührpunkt der Menge

$$A = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s < 0\}.$$

**Aufgabe 18.** Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k k^2 = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6.$$

**Aufgabe 19.** a) Es sei $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ und $t > 0$. Definieren Sie die Aussage

„$f$ ist stetig in $t$ “.

b) Zeigen Sie *direkt mit Hilfe der Definition aus Teil a)*, d.h. mit einem $\epsilon$-$\delta$-Beweis: Die Funktion

$$f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{t}$$

ist stetig in 1.

**Aufgabe 20.** a) Formulieren Sie eine Version des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$. Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

(c) Folgern Sie mit Hilfe eines $\epsilon$-$\delta$-Beweises: $g$ ist gleichmäßig stetig.

**Aufgabe 21.** Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^t \frac{x\,dx}{x^2 - 2x + 2}.$$

**Aufgabe 22.** Zeigen Sie:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x + o(x) \quad \text{für } x \to 0.$$

**Aufgabe 23.** a) Es sei $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $y \in \mathbb{C}$. Definieren Sie die Aussage

„$y$ ist ein Häufungspunkt von $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ “.

b) Sei $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ die Folge

$$b_m = \frac{m i^m}{m + 1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie *unter Verwendung der Definition aus Teil a)* : Die imaginäre Einheit $i$ ist ein Häufungspunkt von $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

**Aufgabe 24.** a) Formulieren Sie die Taylorformel mit zwei verschiedenen Darstellungen des Restgliedes.

b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y}}$$

an der Stelle 0 bis zur 2. Ordnung in eine Taylorreihe, d.h. mit einem Restglied $R(y) = o(y^2)$, $y \to 0$. Beweisen Sie für dieses Restglied die Abschätzung

$$-\frac{5}{16}y^3 \leq R(y) \leq 0, \quad \text{für alle } y \geq 0.$$