Lösungsskizze 14, Mathe Ana I

14.1. If auf $[a\ c]$ diffbar

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ gibt es

Treppenfkt. $g, h : [a, c] \to \mathbb{R}$

mit $\forall x \in [a, c]$:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

und

$$0 \leq \int_a^c h(x)dx - \int_a^c g(x)dx < \varepsilon.$$

Es gilt, dass auch $g|_{[a,b]}$

und $g|_{[b,c]}$ wieder Treppen-

fkt. sind und, dass

$$(*) \quad \int_a^b g|_{[a,b]}(x)dx + \int_b^c g|_{[b,c]}(x)dx =$$

$$= \int_a^c g(x)\,dx .$$

Genauso für h. Es gilt:

$$\underbrace{\int_a^b h|_{[a,b]}(x)\,dx - \int_a^b g|_{[a,b]}(x)\,dx}_{=:\delta \geq 0}$$

$$+ \underbrace{\int_b^c h|_{[b,c]}(x)\,dx - \int_b^c g|_{[b,c]}(x)\,dx}_{=:\gamma \geq 0}$$

$$= \int_a^c h(x)\,dx - \int_a^c g(x)\,dx < \varepsilon$$

Also $\delta < \varepsilon$, $\gamma < \varepsilon$, also $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ R-integrierbar.

bleibt z. z., dass $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

Dies sieht man so:

Für jedes $g \in \{ \mathcal{T}[a,c] \mid g \leq f \}$

ist $g|_{[a,b]} \in \{ \mathcal{T}[a,b] \mid g \leq f \}$

und $g|_{[b,c]} \in \{ \mathcal{T}[b,c] \mid g \leq f \}$

sowie (*). Also

$$\sup \left\{ \int_a^c g(x)dx \,\middle|\, g \in \mathcal{T}[a,c] \,\middle|\, g \leq f \right\}$$

$$\leq \sup \left\{ \int_a^b g(x)dx \,\middle|\, g \in \mathcal{T}[a,b] \,\middle|\, g \leq f \right\}$$

$$+ \sup \left\{ \int_b^c g(x)dx \,\middle|\, g \in \mathcal{T}[b,c] \,\middle|\, g \leq f \right\}.$$

„$\geq$" sieht man genauso, indem man zwei Treppenfkt auf $[a,b]$ und $[b,c]$ zu einer auf $[a,c]$ zusammensetzt.

Lh. 2. Wir wollen

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 dx$$

berechnen. 1. Schritt: Mit Polynomdivision Zählergrad < Nennergrad machen:

$$\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} = 1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

2. Schritt: $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$. Man könnte Partialbruchzerlegung machen in

$$\frac{a+bx}{1+x^2} + \frac{c+dx}{(1+x^2)^2},$$ müsste am Ende aber wieder $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$ integrieren. Also gleich:

Wir kennen

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{-1/2}{1+x^2}\right)'$$

Damit gehts partiell:

$$\int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx =$$

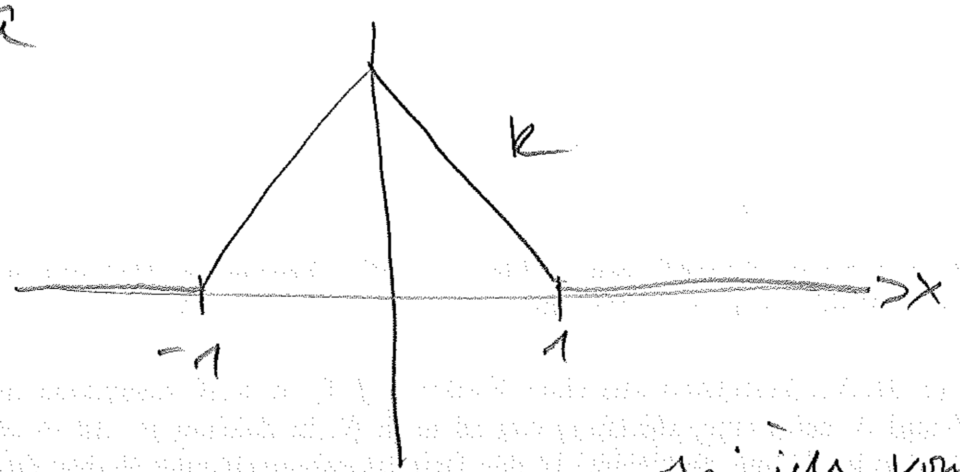
$$= x\left(\frac{-1/2}{1+x^2}\right) - \underbrace{\int \frac{-1/2}{1+x^2}\, dx}_{-\frac{1}{2}\arctan x + C}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 dx = \left[x - 4\left(-\frac{x/2}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[1 - 4\left(\frac{-1/2}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[-1 - 4\left(\frac{x/2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\left[1 + 1 + \frac{\pi}{8}\right] = 4 + \frac{\pi}{4}$$ ohne Gewähr

14.3.a



Das geht partiell, wobei ich von $[-1,0]$ und $[0,1]$ integriere, damit k diffbar. ist:

$$\int_{-1}^{1} k(x)\, f''(nx)\, dx =$$

$$= \left[\underbrace{k(x)\, f'(nx)\cdot \frac{1}{n}}_{\int f''(nx)\,dx}\right]_{-1}^{1}$$

$$- \int_{-1}^{0} \underbrace{k(x)'}_{1} f'(nx)\,\frac{1}{n}\,dx - \int_{0}^{1} \underbrace{k(x)'}_{-1} f'(nx)\,\frac{1}{n}\,dx$$

$$= \left[0 - 0\right] - \int_{-1}^{0} f'(nx)\,\frac{1}{n}\,dx + \int_{0}^{1} f'(nx)\,\frac{1}{n}\,dx$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[-f(nx)\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{n^2}\left[f(nx)\right]_{0}^{1} = \frac{f(n) + f(-n) - 2f(0)}{n^2}$$

b. Dies ist einfach der komplizierte MWS: $\exists \tilde{\xi} \in [-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} k(x) f''(hx)\,dx = f''(h\tilde{\xi}) \underbrace{\int_{-1}^{1} k(x)\,dx}_{1}$$

Und mit $\xi = h\tilde{\xi}$ folgt

$\xi \in [-h,h]$ und die Beh.

Und diese geniale Sache ist nun einfach der Limes:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2}$$

$$\overset{a.}{=} \lim_{h\to 0} \int_{-1}^{1} k(x) f''(hx)\,dx$$

$$\overset{b.}{=} \lim_{h\to 0} \underset{\substack{(|\xi|<h) \\ \text{also } \xi \to 0}}{f''(\xi)} \overset{\text{stet } f''}{=} f''(0).$$

14.4. a. Partialbruch.

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1},$$

$a = -1$, $b = c = \frac{1}{2}$.

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^3-x} = \left[-\ln x + \frac{\ln(x-1)+\ln(x+1)}{2}\right]_a^\infty$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right]_a^\infty$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\ln \underbrace{\frac{x^2-1}{x^2}}_{\to 1}}_{\to 0} - \frac{1}{2}\ln\frac{a^2-1}{a^2}$$

11.4. b. Parciálistörtekre bontás:

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2(x^2+4)^2}\,dx =$$

$$\frac{1}{64}\left(\frac{6x+8}{x^2+4} - 2\ln(x^2+4) - \frac{4}{x} + 4\ln(x) + \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

c. $$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^3}\,dx =$$

$$\frac{1}{8}\left(\ln(1-x) - \frac{2x^3+(x^2-1)^2\ln(x+1)+6x+2}{(x^2-1)^2}\right)$$

14.4. d. Substitution

(*) $t = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

(siehe Skript).

$\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2+\cos\alpha} =$ Trennung bei π weil da die Subst springt

$= \displaystyle\int_0^{\pi} -''- + \int_{\pi}^{2\pi} -''- = \lim_{x\uparrow\pi}\int_0^{x} -''- + \lim_{x\downarrow\pi}\int_{\pi}^{2\pi} -''-$

$\dfrac{\sin x}{1+\cos x} \to \infty$

$\overset{(*)}{=} \displaystyle\lim_{x\uparrow\pi}\int_{\frac{\sin 0}{1+\cos 0}=0}^{\frac{\sin x}{1+\cos x}\to\infty} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} + \lim_{x\downarrow\pi}\int_{\frac{\sin x}{1+\cos x}\to-\infty}^{0} -''-$ Δ

$$= \int_0^\infty \frac{2\,dt}{3+t^2} + \int_{-\infty}^0 \frac{2\,dt}{3+t^2}$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi$$

44.4.e Zunächst integrieren

wir $\int \frac{1}{x^6-1}\,dx$ mit Partbrü.:

$$(x^6-1) = (x^3-1)(x^3+1) =$$
$$= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

Also sind $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

gesucht mit:

$$\frac{1}{x^6-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$
$$+ \frac{d}{x+1} + \frac{ex+f}{x^2-x+1}$$
$$= \frac{1/6}{x-1} + \frac{-1/6\,x - 2/6}{x^2+x+1}$$
$$+ \frac{-1/6}{x+1} + \frac{1/6\,x - 2/6}{x^2-x+1}$$

Wie integriert man Folgendes?

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx}_{\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)}$$

$$+\ \frac{3}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+x+1}}_{(*)}$$

Wie integriert man noch $(*)$?

Dies geht mit der Rechnung

$$\left(c \cdot \arctan(ax+b)\right)' = \frac{ac}{(ax+b)^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad a = c = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{also}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Alles zusammen!

$$\int \frac{dx}{x^6-1} = \frac{1}{6}\Bigg[\ln(x-1) - \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) - \ln(x+1) + \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\Bigg]$$

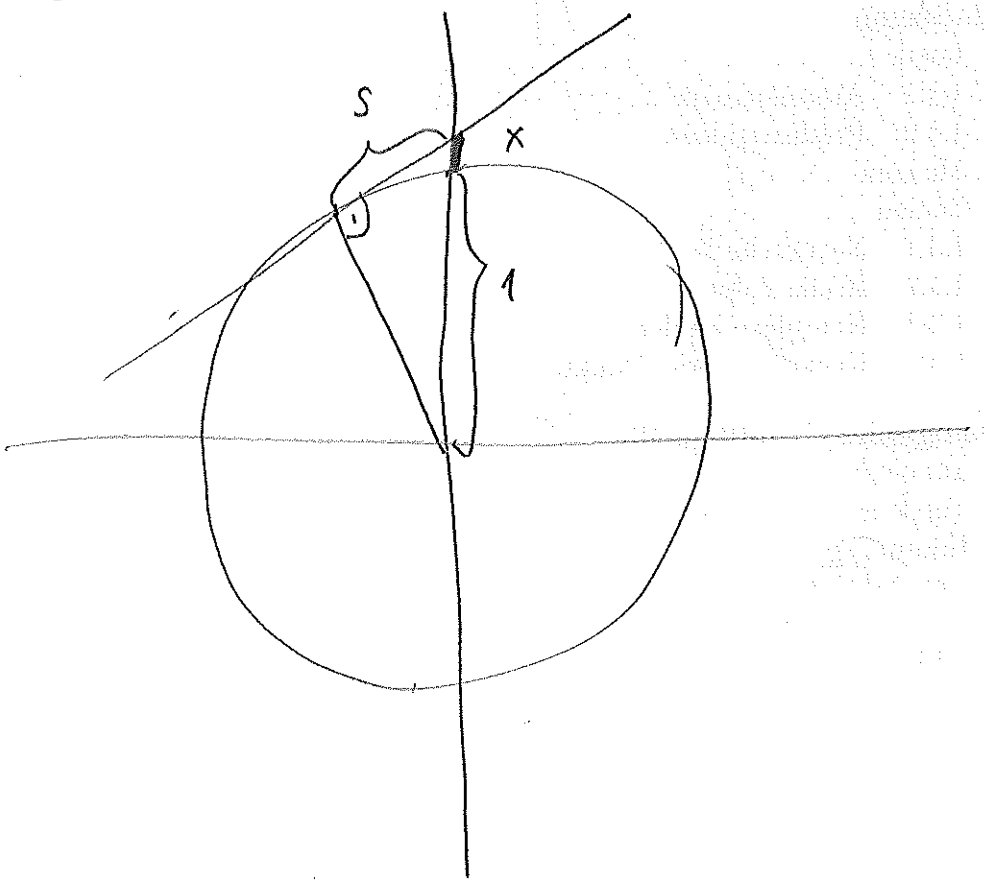
Weil $$\int_a^\infty \frac{e^x}{e^{x\cdot 6}-1}\,dx = \int_{e^a}^\infty \frac{1}{x^6-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[\ln\frac{(x-1)^2\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)} - \sqrt{3}\arctan(+) - \sqrt{3}\arctan(-)\right]_{e^a}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{6}\left[-2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \left(\ln\frac{\left(e^\alpha-1\right)^2\left(e^{2\alpha}-e^\alpha+1\right)}{\left(e^\alpha+1\right)^2\left(e^{2\alpha}+e^\alpha+1\right)} - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^\alpha-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right]$$

14.5. Ich setze $R = 1$, also als Einheit. Dann müssen später alle Längen durch R dividiert werden.

Skizze:



Pythagoras:

$$(1+x)^2 = 1^2 + s^2$$

$$s = \sqrt{x^2 + 2x} \approx \sqrt{2x}$$

für kleine x ($x \ll 1$).

Fehler:

$$\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x} \overset{(*)}{\le} \sqrt{x^2+2x-2x} = x$$

((*) hatten wir bei der glm. Stet. der $\sqrt{}$ - Fkt.)

Für $x=20$ und $R = 6.378.000$

haben wir

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{20}{6378000}\right)^2 + 2\,\frac{20}{6378000}} = 15{,}847$$

$$\approx \sqrt{\frac{40}{6378000}} = 15{,}847$$

Fehler exakt: 0,0126

Fehler nach unserer Abschätzung

$$\le \quad 20$$