Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 13

13.1. a) (Kettenregel)

$$\frac{d}{dx}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}, \quad x>0$$

b) (Kettenregel)

$$\frac{d}{dx}e^{-x^{\frac{3}{4}}} = e^{-x^{\frac{3}{4}}}\left(-\tfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}\right) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}e^{-x^{\frac{3}{4}}}, \quad x>0$$

c) (Quotienten- und Kettenregel)

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin(x^2)}{\cos^2 x} = \frac{\cos(x^2)\cdot 2x\cdot\cos^2 x - 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2x\cos x\cos(x^2)+2\sin x}{\cos^3 x}$$

13.2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall

z.z.: $\forall n\in\mathbb{N}_0: \left(f: I\to\mathbb{R}\ (n+1)\text{-fach diff'bar},\ \forall x\in I: f^{(n+1)}(x)=0\right)$
$$\Rightarrow \exists (a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\ \forall x\in I: f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

Beweis durch Induktion über n:

$n=0$: Sei $f: I\to\mathbb{R}$ diff'bar, $\forall x\in I: f'(x)=0$

Dann folgt nach VL (Satz in 4.4.2), dass f konstant,

d.h. $\exists a_0\in\mathbb{R}\ \forall x\in I: f(x)=a_0$

$n\to n+1$: Gelte Beh. für $n\in\mathbb{N}$.

Sei $f: I\to\mathbb{R}$ $(n+2)$-fach diffbar mit $\forall x\in I: f^{(n+2)}(x)=0$

Dann ist $f^{(n+1)}$ diff'bar mit $\forall x\in I: (f^{(n+1)})'(x)=f^{(n+2)}(x)=0$

$$\underset{\text{Fall } n=0}{\Rightarrow} \exists\alpha\in\mathbb{R}\ \forall x\in I: f^{(n+1)}(x)=\alpha \qquad (+)$$

Setze nun $g: I\to\mathbb{R}$, $g(x) := f(x)-\frac{\alpha}{(n+1)!}x^{n+1}$ $\qquad (*)$

Dann ist g $(n+1)$-fach diff'bar (!) und es gilt [wg: $\frac{d^m}{dx^m}x^m=m!$]

$$\forall x\in I: g^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-\frac{\alpha}{(n+1)!}(n+1)! \overset{(+)}{=} \alpha-\alpha=0$$

Also folgt nach IV:

$$\exists (a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\ \forall x\in I: g(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

Setze $a_{n+1} := \frac{\alpha}{(n+1)!}$, dann $(a_0,\dots,a_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+2}$ und $\forall x\in I$ gilt:

$$f(x) \overset{(*)}{=} g(x)+\frac{\alpha}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}a_kx^k$$

□

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 13

13.3. (a) Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, U Umgebung von x_0, $f_n : U \to \mathbb{C}$ in x_0 stetig Funktion für jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gelte:

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in U_\varepsilon(x_0)} |f_n(x)| < \infty$$

Sei $g : U_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{C}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

z.z.: g in x_0 stetig.

Beweis

Wir ~~verwenden~~ zeigen ~~d~~ Folgenstetigkeit, d.h. $\forall (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Folge ~~in $\mathbb{R}$~~ in $U_\varepsilon(x_0)$: $x_m \to x_0 \Rightarrow g(x_m) \to g(x_0)$

Sei ~~$x_m \to x_0$~~ $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Folge in $U_\varepsilon(x_0)$ mit $x_m \xrightarrow{m\to\infty} x_0$

~~[illegible]~~ Dann:

$$\lim_{m\to\infty} g(x_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_m) \underset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(x_m) \underset{\substack{f_n \text{ in } x_0 \text{ stetig} \\ x_m \to x_0}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = g(x_0)$$

zu $(*)$: gilt wegen dominierter Konvergenz:

Sei $a_{n,m} := f_n(x_m)$, $n, m \in \mathbb{N}$. Dann:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ existiert $\lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ (denn $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty} f_n(x_m) \underset{f_n \text{ stetig}}{=} f_n(x_0)$)
- ~~$\forall m \in \mathbb{N}: |a_{n,m}| \leq$~~
- Sei $b_n := \sup_{x \in U_\varepsilon(x_0)} |f_n(x)|$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

  $$\forall m \in \mathbb{N}: \quad |a_{n,m}| = |f_n(x_m)| \underset{x_m \in U_\varepsilon(x_0)}{\leq} \sup_{x \in U_\varepsilon(x_0)} |f_n(x)| = b_n \quad \text{und}$$

  $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in U_\varepsilon(x_0)} |f_n(x)| < \infty \quad \text{(nach Vor.)}$$

$$\overset{\text{Dom.}}{\underset{\text{Konv.}}{\Longrightarrow}} \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m}, \quad \text{also } (*)$$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 13

$\boxed{13.4.}$ $f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)$ für $x \to 0$ $\quad (*)$

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^2} \underset{\text{l'Hôspital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{2x} \underset{\text{l'Hôspital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 1}{2} = 0 \text{, also } \log(1+x) - x + \tfrac{1}{2}x^2 = o(x^2)$$

d.h. $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$ $\quad (A)$

Man beachte, dass i.F. nur soweit wie nötig ausmultipliziert wird:

$$\log(1+f(x)) \overset{(A)}{=} f(x) - \tfrac{1}{2} f(x)^2 + o(f(x)^2) \overset{(*)}{=}$$

$$= [2x + 3x^2 + o(x^2)] - \tfrac{1}{2}[2x + 3x^2 + o(x^2)]^2 + o([2x + o(x)]^2) =$$

$$= 2x + 3x^2 + o(x^2) - \tfrac{1}{2}[4x^2 + o(x^2)] + o(x^2) =$$

$$= 2x + x^2 + o(x^2) \quad \text{für } x \to 0$$

Also $a = 2$, $b = +1$

b) Es gilt: ~~$\arctan x = x - \frac{1}{3}$~~

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x + \frac{1}{3}x^3}{x^3} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2}{3x^2} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{6(1+x^2)^2} + \frac{2}{6}\right) = 0 \text{, also } \arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3),\ x \to 0$$

Es folgt:

$$\arctan f(x) = f(x) - \tfrac{1}{3} f(x)^3 + o(f(x)^3) =$$

$$\overset{(*)}{=} [2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3)] - \tfrac{1}{3}[2x + 3x^2 + o(x^2)]^3 + o([2x + o(x)]^3)$$

$$= 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3) - \tfrac{1}{3}[8x^3 + o(x^3)] + o(x^3)$$

$$= 2x + 3x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{für } x \to 0$$

Also $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = \frac{4}{3}$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 13

(b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, z.z. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert

~~Sei~~ Definiere für $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_n(x) := \frac{1}{n^3} e^{inx}$. Dann

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)\right)\right) = \frac{1}{x-x_0} \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x-x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

$\sum f_n(x), \sum f_n(x_0)$ absolut konvergent (wg. $|f_n(x)| = \frac{1}{n^3}$)

mit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g_n(x) := \frac{f_n(x) - f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \neq x_0$ und $g_n(x_0) := f_n'(x_0)$

Also genügt zu zeigen: $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ ist in x_0 stetig

Wende (a) an:

- f_n ist in x_0 diff'bar $\Rightarrow g_n(x) = \frac{f_n(x) - f(x_0)}{x-x_0}$ in x_0 stetig (mit $g_n(x_0) = f_n'(x_0)$)
- $g_n(x) = \frac{\mathrm{Re} f_n(x) - \mathrm{Re} f_n(x_0)}{x-x_0} + i \frac{\mathrm{Im} f_n(x) - \mathrm{Im} f_n(x_0)}{x-x_0}$

  Sei $\varepsilon = 1$ und $x \in U_\varepsilon(x_0)$, $x \neq x_0$. Aus MWS folgt:

  Weil $\mathrm{Re} f_n$ stetig diff'bar ist, gibt es $\xi_1 \in U_\varepsilon(x_0)$ mit $\mathrm{Re} f_n(x) - \mathrm{Re} f_n(x_0) = (\mathrm{Re} f_n)'(\xi_1)(x-x_0)$

  Weil $\mathrm{Im} f_n$ stetig diff'bar ist, gibt es $\xi_2 \in U_\varepsilon(x_0)$ mit $\mathrm{Im} f_n(x) - \mathrm{Im} f_n(x_0) = (\mathrm{Im} f_n)'(\xi_2)(x-x_0)$

  $\Rightarrow g_n(x) = (\mathrm{Re} f_n)'(\xi_1) + i(\mathrm{Im} f_n)'(\xi_2)$

  $\Rightarrow |g_n(x)| \leq |(\mathrm{Re} f_n)'(\xi_1)| + |(\mathrm{Im} f_n)'(\xi_2)| \leq |f_n'(\xi_1)| + |f_n'(\xi_2)| = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2}$

  weil $f_n'(\xi) = \frac{1}{n^3} e^{in\xi}(in) = \frac{i}{n^2} e^{in\xi}$, also $|f_n'(\xi)| = \frac{1}{n^2}$

  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in U_1(x_0)} |g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty$

Nach (a) folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ in x_0 stetig ist, d.h. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.

□

Man muss f_n in Real- und Imaginärteil aufspalten, weil der MWS nur für reelle Funktionen gilt. Es gibt nämlich keinen Grund, warum $\xi_1 = \xi_2$ gelten soll (i.A. ist auch $\xi_1 \neq \xi_2$).

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 13

$\boxed{13.5}$ a) i.W. liegt das daran, dass $\sqrt{}$ und $\uparrow^2$ bei 1 lokal Libschitz-stetig sind:

$$\exists \varepsilon_0>0\ \exists L_{\sqrt{}}, L_{\uparrow 2}>0\ \forall x,y\in U_{\varepsilon_0}(1):\ |\sqrt{x}-\sqrt{y}|\le L_{\sqrt{}}\cdot|x-y| \text{ und } |x^2-y^2|\le L_{\uparrow 2}|x-y|$$

$f(x)=\sqrt{1+O(x^\beta)} \iff f(x)=1+O(x^\beta)$ ~~heißt~~ für $x\downarrow 0$ heißt:

$$\exists \varepsilon>0, C>0\ \exists g:]0,\varepsilon[\to\mathbb{R} \text{ ~~mit~~}: \forall x\in]0,\varepsilon[: |g(x)|\le Cx^\beta \wedge f(x)=\sqrt{1+g(x)}$$

$$\iff$$

$$\exists \tilde\varepsilon>0, \tilde C>0\ \exists \tilde g:]0,\tilde\varepsilon[\to\mathbb{R}: \forall x\in]0,\tilde\varepsilon[: |\tilde g(x)|\le \tilde C x^\beta \wedge f(x)=1+\tilde g(x)$$

„$\Rightarrow$" Seien solche ε, C, g gegeben. Sei $\delta>0$ so dass $Cx^\beta<\varepsilon_0$ für alle $x\in]0,\delta[$.
Wähle $\tilde\varepsilon=\min\{\varepsilon,\delta\}$, $\tilde C= C\cdot L_{\sqrt{}}$, $\tilde g(x):=\sqrt{1+g(x)}-1$ für $x\in]0,\tilde\varepsilon[$
Dann $1+\tilde g(x)=\sqrt{1+g(x)}=f(x)$ und
$|\tilde g(x)|=|\sqrt{1+g(x)}-\sqrt{1}|\le L_{\sqrt{}}\cdot|1+g(x)-1|=L_{\sqrt{}}|g(x)|\le L_{\sqrt{}}\cdot C\cdot x^\beta=\tilde C x^\beta$

„$\Leftarrow$" Seien solche $\tilde\varepsilon,\tilde C,\tilde g$ gegeben. Sei δ wie oben.
Wähle $\varepsilon=\min\{\tilde\varepsilon,\delta\}$, $C=\tilde C\cdot L_{\uparrow 2}$, $g(x):=(1+\tilde g(x))^2-1$ für $x\in]0,\varepsilon[$
Dann $\sqrt{1+g(x)}=1+\tilde g(x)=f(x)$ und
$|g(x)|=|(1+\tilde g(x))^2-1^2|\le L_{\uparrow 2}|\tilde g(x)|\le L_{\uparrow 2}\cdot\tilde C\cdot x^\beta=Cx^\beta$

$f(x)=\sqrt{1+o(x^\beta)} \iff f(x)=1+o(x^\beta)$ für $x\downarrow 0$

zeigt man analog.

($|g(x)|\le Cx^\beta$ ist durch $\left|\frac{g(x)}{x^\beta}\right|\to 0$ zu ersetzen)

d.h.: $\exists\varepsilon>0\ \exists g:]0,\varepsilon[\to\mathbb{R}: \lim_{x\downarrow 0}\frac{g(x)}{x^\beta}=0 \wedge f(x)=\sqrt{1+g(x)}$ für $x\in]0,\varepsilon[$

$\iff \exists\tilde\varepsilon>0\ \exists\tilde g:]0,\tilde\varepsilon[\to\mathbb{R}\ \lim_{x\downarrow 0}\frac{\tilde g(x)}{x^\beta}=0 \wedge f(x)=1+\tilde g(x)$ für $x\in]0,\tilde\varepsilon[$

„$\Rightarrow$" Wähle $\tilde\varepsilon$ und $\tilde g$ wie oben. Dann $f(x)=1+\tilde g(x)$ und

$$\lim_{x\downarrow 0}\left|\frac{\tilde g(x)}{x^\beta}\right|=\lim_{x\downarrow 0}\left|\frac{\sqrt{1+g(x)}-\sqrt{1}}{x^\beta}\right|\le\lim_{x\downarrow 0}\frac{L_{\sqrt{}}\cdot|g(x)|}{|x^\beta|}=0$$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 13

„$\Leftarrow$" Wähle ε, g wie oben. Dann $f(x) = \sqrt{1+g(x)}$ und

$$\lim_{x\downarrow 0} \left|\frac{g(x)}{x^3}\right| \leq \lim_{x\downarrow 0} L_{p2} \left|\frac{g(x)}{x^2}\right| = 0 \quad .$$

b) Sei $y = \cosh x$, also $x = \operatorname{arcosh} y$

Es gilt: $y = \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, ~~also~~ $x \downarrow 0$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad , \; x\downarrow 0$$

Für x klein genug [$\rightsquigarrow$ so ergibt sich $\varepsilon > 0$] gilt also "$|o(x^2)| \leq \frac{1}{4}x^2$",

~~also $4(y-1) \leq x^2 \leq$~~ also $y-1 \geq \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$ und $y-1 \leq \frac{3}{4}x^2$, d.h.

$$\frac{4}{3}(y-1) \leq x^2 \leq 4(y-1)$$

c) Sei $y = \cosh x$, also $x = \operatorname{arcosh} y$

Es gilt: $y = \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, $x\downarrow 0$ $\qquad (+)$

also $y = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$\Rightarrow \quad 2y - 2 = x^2 + O(x^4) = x^2(1 + O(x^2))$$

$$\overset{(a)}{\Rightarrow} \quad \sqrt{2y-2} = x\sqrt{1+O(x^2)} \overset{(a)}{=} x(1+O(x^2)) = x + O(x^3)$$

Aus b) folgt $C^{\frac{3}{2}}(y-1)^{\frac{3}{2}} \leq x^3 \leq C'^{\frac{3}{2}}(y-1)^{\frac{3}{2}}$, also $O(x^3) = O((y-1)^{3/2})$

[und auch $o(x^3) = o((y-1)^{3/2})$]

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2y-2} = \operatorname{arcosh} y + O((y-1)^{3/2})$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arcosh} y = \sqrt{2y-2} + O((y-1)^{3/2}) \quad , \; y \downarrow 1$$

Angenommen, es gelte $\operatorname{arcosh} y = \sqrt{2y-2} + o((y-1)^{3/2})$, $y\downarrow 1$

$$\overset{b)}{\Rightarrow} \quad \sqrt{2y-2} = x + o(x^3) = x(1+o(x^2)) \overset{(a)}{=} x\sqrt{1+o(x^2)} \quad , \; x\downarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad 2y - 2 = x^2(1+o(x^2)) = x^2 + o(x^4) \quad , \; x\downarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad y = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4) \quad , \; x\downarrow 0$$ im Widerspruch zu $(+)$

Also $\alpha = \frac{3}{2}$ //

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 13

$\boxed{13.6.}$ Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$: ~~$g_n, h_n : [0, 2\pi]$~~
$g_n, h_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ durch

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} 1\!\!1_{[k\frac{\pi}{2n}, (k+1)\frac{\pi}{2n}[}(x) \cdot \sin\left(k\frac{\pi}{2n}\right) \quad \text{und}$$

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} 1\!\!1_{[k\frac{\pi}{2n}, (k+1)\frac{\pi}{2n}[}(x) \cdot \sin\left((k+1)\frac{\pi}{2n}\right), \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

⌈ Für $A \subseteq \mathbb{R}$ ist die Indikatorfunktion $1\!\!1_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$1\!\!1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

definiert ⌋

Es gilt: $g_n, h_n \in \mathcal{T}[0, \frac{\pi}{2}]$

Weil sin auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton steigend ist, gilt:

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad g_n \leq \sin \leq h_n$, also:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \int_0^{\pi/2} g_n(x)\,dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx \leq \int_0^{\pi/2} h_n(x)\,dx \quad \text{und}$$

$$\int_0^{\pi/2} g_n(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ g_n \text{ Treppenfkt.}}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{2n}\right)\left[(k+1)\frac{\pi}{2n} - k\frac{\pi}{2n}\right] = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{ik\frac{\pi}{2n}} - e^{-ik\frac{\pi}{2n}}\right) = \frac{\pi}{4ni}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)^k - \left(e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right)^k\right) \underset{\text{Summe}}{\overset{\text{geometrische}}{=}}$$

$$= \frac{\pi}{4ni}\left(\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)^n - 1}{e^{i\frac{\pi}{2n}} - 1} - \frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}}\right)^n - 1}{e^{-i\frac{\pi}{2n}} - 1}\right) \overset{(*)}{=} \frac{\pi}{4ni}\left(\frac{i-1}{1 + i\frac{\pi}{2n} + o(\frac{1}{n}) - 1} - \frac{-i-1}{1 - i\frac{\pi}{2n} + o(\frac{1}{n}) - 1}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4ni}\left(\frac{i-1}{i\frac{\pi}{2n} + o(\frac{1}{n})} + \frac{i+1}{-i\frac{\pi}{2n} + o(\frac{1}{n})}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{i-1}{-\frac{\pi}{2} + o(1)} + \frac{i+1}{\frac{\pi}{2} + o(1)}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(\frac{-i+1}{\frac{\pi}{2}} + \frac{i+1}{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

zu $(*)$: Es gilt $e^{ix} = 1 + ix + o(x)$ für $x \to 0$.

Weiter gilt: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h_n(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} g_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2n}\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Also ist sin Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} h_n(x)\,dx = 1 \quad //$$