Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 12

$\boxed{12.1}$

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx - \mu \frac{d}{dt} x \qquad (*)$$

(a) Sei $V = \left\{ x : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto x(t) \end{array} \;\middle|\; x \text{ erfüllt } (*) \right\}$

z.z.: V ist ein $\mathbb{C}$ - Vektorraum

(mit der üblichen Addition von Funktionen und Skalarmultiplikation,
d.h. sind $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto x(t)$, und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto y(t)$, Funktionen
so ist $(x+y) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(x+y)(t) := x(t) + y(t)$

$\uparrow$ Add. von Funkt. $\uparrow$ Add. in $\mathbb{C}$

und für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt: $(\alpha x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(\alpha x)(t) := \alpha \cdot x(t)$)

Es genügt zu zeigen:

„ * Sind x, y Lösungen von $(*)$ [d.h. $x, y \in V$] und $\alpha \in \mathbb{C}$,
so sind $x+y$ und $\alpha \cdot x$ Lösungen von $(*)$ [d.h. $x+y, \alpha \cdot x \in V$]"

(weil die Rechengesetze klar sind bzw. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Funktion$\}$ ein $\mathbb{C}$-VR ist)

Seien also $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$; dann:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x+y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lin. von } \frac{d}{dt}}}{=} m \frac{d^2}{dt^2} x + m \frac{d^2}{dt} y \underset{\substack{\uparrow \\ x,y \in V}}{=} -kx - \mu \frac{d}{dt} x - ky - \mu \frac{d}{dt} y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lin. von } \frac{d}{dt}}}{=}$$

$$= -k(x+y) - \mu \frac{d}{dt}(x+y), \quad \text{d.h. } x+y \text{ erfüllt } (*)$$

und genauso

$$m \frac{d^2}{dt^2}(\alpha x) = \alpha \cdot m \frac{d^2}{dt^2} x = \alpha\left(-kx - \mu \frac{d}{dt} x\right) = -k(\alpha x) - \mu\left(\frac{d}{dt}(\alpha x)\right)$$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 12

(b) Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$

gesucht: $\lambda \in \mathbb{C}$ in Abhängigkeit von m, k, μ, so dass $x(t) = e^{\lambda t}$ eine Lösung von $(*)$ ist.

Ansatz in $(*)$ eingesetzt ergibt:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad m \frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} = -k e^{\lambda t} - \mu \frac{d}{dt} e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad m \lambda^2 e^{\lambda t} = -k e^{\lambda t} - \mu \cdot \lambda e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow$$

$$m\lambda^2 = -k - \mu\lambda \quad \Leftrightarrow$$

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{„} \lambda_{\pm} = \frac{1}{2m}\left(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}\right) \text{“}$$

Es ergeben sich folgende Fälle (beachte $m, k, \mu > 0$):

<u>1. Fall:</u> $\mu > \sqrt{4mk}$

Dann sind $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2m}\left(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}\right)$ reell und

$$x_1(t) = \exp\left(\tfrac{1}{2m}\left(-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4mk}\right) \cdot t\right) \quad \text{sowie}$$

$$x_2(t) = \exp\left(\tfrac{1}{2m}\left(-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4mk}\right) \cdot t\right)$$

zwei reelle Lösungen.

<u>2. Fall:</u> $\mu < \sqrt{4mk}$

Dann sind $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2m}\left(-\mu \pm i\sqrt{4mk - \mu^2}\right)$ komplex (und nicht-reell) und $x_{1/2}(t) = \exp(\lambda_{1/2} \cdot t)$ zwei komplexe Lösungen.

<u>3. Fall:</u> $\mu = \sqrt{4mk}$

Dann findet man mit dem Ansatz nur eine Lösung, nämlich

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\mu}{2m} \cdot t\right)$$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 12

(c) <u>1. Fall:</u> $x_1(t)$, $x_2(t)$ sind schon reell und $\mathbb{C}$-linear unabhängig, denn:

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}: \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \text{ (für } t=0) \text{ und } \\ \alpha e^{\lambda_1} + \beta e^{\lambda_2} = 0 \quad (\text{für } t=1) \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha(e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}) = 0$ und $\beta = -\alpha \underset{\text{da } \lambda_1 \neq \lambda_2}{\Rightarrow} \alpha = \beta = 0$

<u>2. Fall:</u> Setze $D := \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - \mu^2} > 0$. Dann gilt:

$$x_1(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t} e^{iDt} = e^{-\frac{\mu}{2m}t}(\cos Dt + i \sin Dt)$$

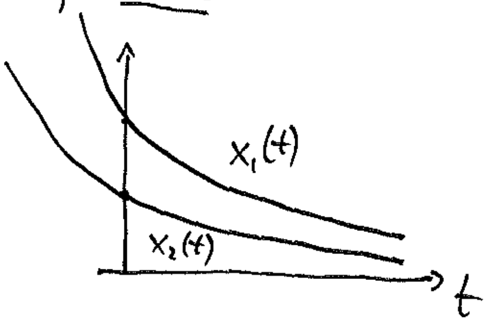
$$x_2(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t} e^{-iDt} = e^{-\frac{\mu}{2m}t}(\cos Dt - i \sin Dt)$$

Wegen (a) sind $y_1 := \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ und $y_2 := -\frac{1}{2}i x_1 + \frac{1}{2} i x_2$ Lösungen und es gilt:

$$y_1(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t} \cos Dt, \quad y_2(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t} \sin Dt$$

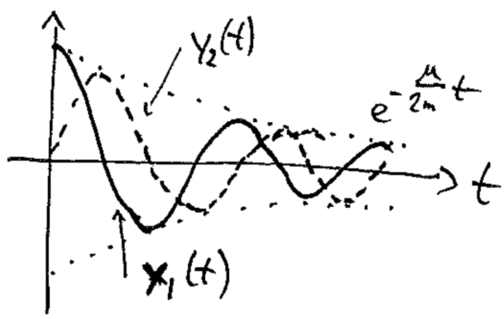
Also sind y_1, y_2 reelle und auch $\mathbb{C}$-linear unabhängig, weil $\cos x$ und $\sin x$ $\mathbb{C}$-l.u. sind ($\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ und $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$)

(d) <u>1. Fall</u>



starke Reibung
„Dämpfungslösung"

<u>2. Fall</u>



schwache Reibung, „Schwingungslösung"

Man beachte, dass man die Differentialgleichung im Komplexen lösen muss, um ~~auf~~ die reellen (!) Schwingungslösungen zu erhalten!

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 12

$\boxed{12.2}$ a) Im Zähler steht (ein Vielfaches der) Ableitung des Nenners, d.h.

$$f(x) = \log(1+e^x)$$

denn $\frac{d}{dx}\log(1+e^x) = \frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{d}{dx}(1+e^x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

b) $f'(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, also analog

wegen $\frac{d}{dx}\log(\cos x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x)$ ~~gibt~~ kann man

$f(x) = -\log(\cos x)$ wählen.

$\boxed{12.3}$ $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

z.z.: $\exists L>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}: |f(x)-f(y)| \le L\cdot|x-y|$

(a) $$\left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right| = \left|\frac{(1+y^2)-(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| = \left|\frac{y^2-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| = \left|\frac{(y-x)(y+x)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| =$$
$$= \frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}\cdot|y-x|$$

Wegen $|x+y| \le |x|+|y| \overset{(*)}{\le} (x^2+1)+(y^2+1) \le 2\cdot(x^2y^2+x^2+y^2+1)$

gilt: $\forall x,y\in\mathbb{R}: \frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \le 2$

(*) FU: (i) $|x|<1$, dann $|x|\le x^2+1$ und (ii) $|x|\ge 1$, dann $|x|\le|x|^2\le x^2+1$

<u>Also</u>: Setze $L=2$, Dann $\forall x,y\in\mathbb{R}: |f(x)-f(y)| = \frac{|x+y|\cdot|y-x|}{(1+x^2)(1+y^2)} \le 2\cdot|x-y|$

(b) Weil f diff'bar ist, gibt es $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ein $\xi_{x,y}\in\mathbb{R}$ mit

$$f(x)-f(y) = f'(\xi_{x,y})(x-y)$$

Setze also $L = \sup_{\xi\in\mathbb{R}}|f'(\xi)|$, dann:

$\forall x,y\in\mathbb{R}: \quad |f(x)-f(y)| = |f'(\xi_{x,y})|\cdot|x-y| \le \sup_{\xi\in\mathbb{R}}|f'(\xi)|\cdot|x-y| = L\cdot|x-y|$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 12

wichtig ist hier natürlich, dass $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |f'(\xi)| < \infty$!

$f'(x) = \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x$, also $|f'(x)| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} \leq 2$, also

f ist gleichmäßig stetig, weil jede Lipschitz-stetige Funktion dies ist.

$\boxed{12.4.}$ $y = f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\Leftrightarrow \quad y e^{2x} + y = e^{2x} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x}(y-1) = -1-y$

$\Leftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} \qquad (*)$

(Man beachte $y \in]-1,1[$!)

Also $f^{-1}(y) = \operatorname{artanh} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$, $y \in]-1,1[$

direkt:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2} \frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{1}{2} \frac{1-y}{1+y} \frac{+1(1-y)-(-1)(1+y)}{(1-y)^2} = \frac{1}{2} \frac{2}{(1+y)(1-y)} = \frac{1}{1-y^2}$$

mit Formel: $y = f(x)$

$$(f^{-1})'(y) = (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \underset{\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}}{=} \cancel{\cosh^2 x} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}} = \frac{1}{1-\tanh^2 x} = \frac{1}{1-y^2} \quad :)$$

(*) oder ~~aus~~ $y = \tanh x$, dann

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{(1+y)^2}{(1-y)(1+y)} = \frac{1+2y+y^2}{1-y^2} = \frac{1 + 2\frac{\sinh x}{\cosh x} + \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}}{1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}} =$$

$$= \frac{\cosh^2 x + 2 \sinh x \cosh x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x - \sinh^2 x} = \frac{(\cosh x + \sinh x)^2}{1} = (e^x)^2 = e^{2x}$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$.

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 12

$\boxed{12.5}$ Wichtig ist hier die Wahl der richtigen Ind.annahme!

z.z.: $\forall n \in \mathbb{N} : \Big(\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \big[(f \text{ n-fach stetig diffbar}, \forall j = 0, \ldots, n-1 \ f^{(j)}(0) = 0) \Rightarrow f(x) = O(|x|^n) \text{ für } x \to 0 \big] \Big)$

Beweis durch Induktion über n.

Ind. Anfang: $n=1$ z.z. $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (f$ 1-fach stetig diff'bar, $f(0) = 0) \Rightarrow f(x) = O(|x|)$ für $x \to 0$

Sei f 1-fach stetig diff'bar mit $f(0) = 0$. Dann

$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + o(1) = f'(0) \cdot x + o(1)$ für $x \to 0$,

also $|f(x)| \leq C \cdot |x|$ mit $C = 2|f'(0)|$ für x nahe bei 0 (s.d. "$o(1) \leq f'(0)x$")

also $f(x) = O(|x|)$

Ind. Schritt: $n \leadsto n+1$. Sei $n \in \mathbb{N}$

Gelte (Ind. Vorr.): $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (n-fach stetig diff'bar, $f^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \ldots, n-1$) $\Rightarrow f(x) = O(|x|^n)$ f. $x \to 0$

z.z.: $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n+1$-fach stetig diffbar, $f^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \ldots, n$) $\Rightarrow f(x) = O(|x|^{n+1})$ f. $x \to 0$

Sei f $(n+1)$-fach stetig diff'bar mit $\forall j = 0, \ldots, n : f^{(j)}(0) = 0$

Nach MWS gibt es für alle $x \in \mathbb{R}$ ein ξ_x zw. 0 und x mit

$$f(x) - f(0) = f'(\xi_x)(x - 0), \text{ also } f(x) = f'(\xi_x) \cdot x \qquad (*)$$

f' ist n-fach stetig diffbar und $(f')^{(j)}(0) = 0$, für $j = 0, \ldots, n-1$

Also gilt nach Ind. Vorr.: $f'(\xi_x) = O(|\xi_x|^n)$ für $\xi_x \to 0$,

d.h. $\exists C(f'), \varepsilon(f') > 0 \ \forall \xi_x \in \mathbb{R}$ mit $|\xi_x| \leq \varepsilon(f')$ gilt: $|f'(\xi_x)| \leq C(f') \cdot |\xi_x|^n \quad (**)$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \varepsilon(f')$:

$$|f(x)| = |f'(\xi_x)| \cdot |x| \leq C(f') \cdot |\xi_x|^n \cdot |x| \underset{|\xi_x| \leq |x|}{\leq} C(f') \cdot |x|^n \cdot |x| = C(f') \cdot |x|^{n+1}$$

d.h. $f(x) = O(|x|^{n+1})$ für $x \to 0$ [mit $C(f) := C(f')$ und $\varepsilon(f) := \varepsilon(f')$]

Essentiell war, dass "$\forall f$" innerhalb der Ind.annahme stand!!