Merkl Ana I

Lösungsskizze Blatt 11

11.1. a. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(= \sinh(x)\right)$; hat Konv. ∞.

$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sinh(x) - x - \frac{1}{6}x^3}{x^4}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n+1-4}}{(2n+1)!}$ ist Potr. mit Konvr. ∞

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \text{—}\,''\,\text{—} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{0^{2n-3}}{(2n+1)!} = 0$

b. $\frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \left(= \cos(x)\right) \Rightarrow \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^5} = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-5}}{(2n)!}$

ist Potr. mit Konvr. $\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} \sum_{3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-5}}{(2n)!} = 0$

c. $\frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}$ ist überall diffb. und $\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}}\right)' = -\frac{1}{2}\frac{-e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-x}}^3}$. Weil $f(0+h)$

$= f(0) + h \cdot f'(0) + o(h) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+e^{-h}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + h\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}^3} + o(h)$.

11.2. Wir überlegen uns: Bei $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ folgt aus

$\frac{f(n+1)}{f(n)} \leq \frac{g(n+1)}{g(n)}$ für großes n, dass $f = \mathcal{O}(g)$

für $n \to \infty$.

a. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = 2\,\frac{2n+1}{n+1}$, und dies liegt zwischen 3 und 4 für großes n.

$\Rightarrow e^{\ln 3 \cdot n} = 3^n \ll a_n \ll 4^n = e^{\ln 4 \cdot n}$

b. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = n+1$, während $\frac{e^{d(n+1)}}{e^{dn}} = e^d$ und

$\frac{e^{(n+1)^2}}{e^{n^2}} = e^{2n+1} \Rightarrow e^{dn} \ll b_n \ll e^{n^2}$.

11.3. Diesen wunderschönen Sachverhalt zeigt man folgendermaßen:

$\underline{k=0}$. Die Folge $\left(\frac{1}{2\pi n}\right)_n \to 0$, aber $\cos\left(1/\frac{1}{2\pi n}\right)$

$= 1$. Also ist f_0 nicht stetig in 0.

$\underline{k=1}$. Aus $|f_1(x)| \le |x| \;\forall x$ folgt die Stetigkeit in 0. Betrachte den Diffquot. in 0:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim \frac{h\cos\frac{1}{h} - 0}{h}$$
$= \lim \cos\frac{1}{h}$, und das divergiert. (Denn
$$\left(\cos\left(1/\tfrac{1}{2\pi n}\right) \to 1;\ \cos\left(1/\tfrac{1}{2\pi n+\pi}\right) \to -1.\right)$$
Also ist f_1 in 0 nicht diffb.

$\underline{k=2}$. Stetigkeit klar. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2\cos\frac{1}{h} - 0}{h} = 0$.

Also $f_2'(0) = 0$. Aber für $x \neq 0$ gilt:

$f_2'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$, wobei $2x\cos\frac{1}{x} \to 0$ und $\sin\frac{1}{x}$ divergiert für $x \to 0$.

Also ist f_2' nicht stetig. (Teil.)

$\underline{k=3}$. $f_3'(0) = 0$ genauso. Für $x \neq 0$:

$f_3'(x) = 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht diffb, weil $3x^2\cos\frac{1}{x} = 3f_2$ diffb. ist und $x\sin\frac{1}{x}$ mit den Argumenten von f_1 nicht diffb. ist.

$\underline{k \ge 4}$. Mit Induktion geht es so weiter: Die Abl. sind immer Linkomb. von $x^m\cos\frac{1}{x}$ und $x^m\sin\frac{1}{x}$, die für

$n \geq 2$ diffbar sind. Und

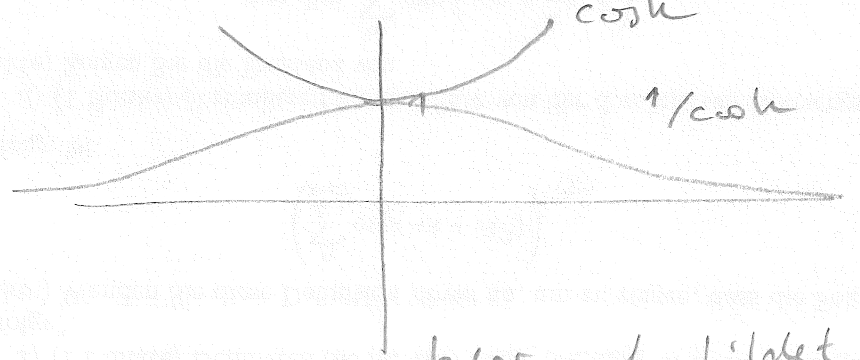
je nachdem, ob man zuerst bei

$n = 2$ oder bei $n = 1$ als kleinstes

n ankommt, folgt einer der

beiden Fälle.

11.4



Wir machen uns klar, f bildet $]0,\infty[$ bijektiv auf $]0,1[$ ab. Dann folgt

$$y = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \Leftrightarrow e^{2x} \cdot y - e^x \cdot 2 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \in \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} \right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \ln\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}\right) \right\}, \text{ und weil}$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y} > 1, \text{ also } x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y}\right).$$

(Das Minus würde den negativen Zweig

(*) geben; wir halten fest: $\frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} = \left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right)^{-1}$),

$$\left(\ln\left(1 + \sqrt{1-y^2}\right) - \ln y\right)' = \frac{1}{1+\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}}$$

$$- \frac{1}{y} = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y^2} \cdot \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{y}$$

$$= \frac{-1 + y\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-y^2}} = \frac{-1}{y\sqrt{1-y^2}}$$

Für die Ableitung der Umkehrfkt. gilt

$$f^{-1\,\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$f'(x) = -2\,\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$(*) \quad f^{-1\,\prime}(y) = \frac{1}{-2\,\dfrac{\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} - \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}}{\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} + \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\right)^2}}$$

$$= -\frac{\frac{4}{y^2}}{2\,\frac{2\sqrt{1-y^2}}{y}} = \frac{-4}{4y\sqrt{1-y^2}} \quad \text{whow!}$$

b. Wir wissen $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\arctan 2x\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2$$

c. Hier steht oben ein Vielfaches der Ableitung der Unteren ?

$$\left(+2\ln\left(1+\tfrac{1}{2}\sin x\right)\right)' = +2\,\frac{+\frac{1}{2}\cos x}{1+\frac{1}{2}\sin x}$$

11.5 Der MWS sagt:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stg. diffb $\Rightarrow$

$\exists\ \xi \in]a,b[$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Sei nun $|f'(x)| < M$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für

$\forall \varepsilon \forall x, y$ mit $|x-y| < \frac{\varepsilon}{M}$:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(weil sonst

$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| > M$ im Wider-

spruch zum MWS),

also ist f glm. Lipschitzstetig.

$\frac{1}{1+e^{+x}}$ ist stetig diffb. mit

$$\left|\left(\frac{1}{1+e^{+x}}\right)'\right| = \left|-\frac{+e^{+x}}{(1+e^{+x})^2}\right| < 1.$$

11.6. f stg in x_0 :$\Leftrightarrow$

$$\forall \alpha \exists \delta \forall y : |x_0 - y| < \delta$$

$$\Rightarrow |f x_0 - f y| < \alpha$$

g stg. in $f(x_0)$:$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon \exists \beta \forall z : |f(x_0) - z| < \beta$$

$$\Rightarrow |g f(x_0) - g(z)| < \varepsilon$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Setze $\alpha := \beta$

$$\Rightarrow \forall y : |x_0 - y| < \delta \Rightarrow |f x_0 - \underbrace{f y}_{z}| < \underset{\beta}{\overset{\shortparallel}{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow |f x_0 - z| < \beta \Rightarrow |\underset{h(x_0)}{\underset{\shortparallel}{g f x_0}} - \underset{h(y)}{\underset{\shortparallel}{g z}}| < \varepsilon$$

11.7. a.

$$|e^{-1+i}| = |e^{-1}||e^{i}| = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

für m so groß, dass $\left(\frac{1}{e}\right)^m < \varepsilon$

$$\Rightarrow \forall n \geq m: \left|e^{(-1+i)n} - 0\right|$$

$$= \left(\frac{1}{e}\right)^n \leq \left(\frac{1}{e}\right)^m < \varepsilon$$

b. Es gilt

$$k + \frac{n^2}{k} \geq n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \frac{1}{k + \frac{n^2}{k}} \leq \frac{1}{n^2},$$

und dies ist unser von k unabhängige Majorante, weil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{k} \sum_{n} \frac{k}{n(k^2+n^2)}$$

$$= \sum_{n} \underbrace{\lim_{k} \frac{k}{n(k^2+n^2)}}_{0} = 0$$