11.2) (a)

<u>Beh.</u>: $\forall \varepsilon > 0: \; e^{n \log(4-\varepsilon)} = (4-\varepsilon)^n \ll a_n \ll (4+\varepsilon)^n = e^{n \log(4+\varepsilon)}$

<u>Beweis</u>

Es gilt: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2-n-1)!} \dfrac{n!\,(2n-n)!}{(2n)!} = \dfrac{2(n+1)\cdot(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 4$,

also: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N: \; (4 - \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq (4 + \frac{\varepsilon}{2})$ $\qquad (*)$

Sei nun $\varepsilon > 0$.

Dann gibt es $c_1, c_2 > 0$, so dass $\forall n \in \mathbb{N}: \; c_1 (4-\frac{\varepsilon}{2})^n \leq a_n \leq c_2 (4 + \frac{\varepsilon}{2})^n$, ~~denn~~ $(**)$

denn wählt man $N \in \mathbb{N}$ nach $(*)$, so gilt ~~für~~ dies

- für $n \leq N$ durch Wahl geeigneter Konstanten $c_1, c_2 > 0$
- für $n \geq N$ durch Induktion $\overset{N \leq}{:} n \rightsquigarrow n+1$:

$$c_1 (4-\tfrac{\varepsilon}{2})^{n+1} = c_1 (4-\tfrac{\varepsilon}{2})^n (4-\tfrac{\varepsilon}{2}) \overset{IV}{\leq} a_n (4-\tfrac{\varepsilon}{2}) \overset{(*)}{\leq} a_{n+1} \overset{(*)}{\leq} a_n (4+\tfrac{\varepsilon}{2}) \overset{IV}{\leq} c_2 (4+\tfrac{\varepsilon}{2})^{n+1}$$

~~Zu~~ Nun Beweis der Beh.:

- zu $(4-\varepsilon)^n \ll a_n$: $\quad \dfrac{(4-\varepsilon)^n}{a_n} \underset{\uparrow (**)}{\leq} \dfrac{(4-\varepsilon)^n}{c_1 (4-\frac{\varepsilon}{2})^n} = \dfrac{1}{c_1} \Big(\underbrace{\dfrac{4-\varepsilon}{4-\varepsilon/2}}_{<1}\Big)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- zu $a_n \ll (4+\varepsilon)^n$: $\quad \dfrac{a_n}{(4+\varepsilon)^n} \overset{(**)}{\leq} \dfrac{c_2 (4+\frac{\varepsilon}{2})^n}{(4+\varepsilon)^n} = c_2 \Big(\underbrace{\dfrac{4+\varepsilon/2}{4+\varepsilon}}_{<1}\Big)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\square$

(b) <u>Beh:</u> $\forall \gamma > 0: \; e^{\gamma n} \ll n! \ll e^{n^2}$

<u>Beweis</u>:

- Sei $\gamma > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n_0 \geq 2e^{\gamma}$, und $n > n_0$, dann:

$$\frac{e^{\gamma n}}{n!} = \frac{e^{\gamma n_0}}{n_0!} \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{e^{\gamma}}{k} \leq \frac{e^{\gamma n_0}}{n_0!} \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{e^{\gamma}}{2e^{\gamma}} = \frac{e^{\gamma n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also $e^{\gamma n} \ll n!$

- Wegen $\frac{n}{e^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0: \; \frac{n}{e^n} \leq \frac{1}{2}$. Wähle $n \geq n_0$, dann

$$\frac{n!}{e^{n^2}} = \frac{n!}{e^{n \cdot n}} = \frac{n!}{(e^n)^n} \leq \frac{n^n}{(e^n)^n} = \left(\frac{n}{e^n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also $n! \ll e^{n^2}$

$\square$