# Analysis I Merkl

# Blatt 10 Lösungsskizze

a. Machen wir uns die einzelnen Schritte hier genau klar:

Allgemein gilt für Polynome mit reellen Koeffizienten, $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \overline{z}^n = \sum a_n \overline{z^n} = \sum \overline{a_n z^n}$$

$$= \overline{\sum a_n z^n}.$$

Aus der Stetigkeit der Konjugation folgt für eine Potreihe mit reellen Koeff.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{z}^n = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} a_n \overline{z}^n$$

$$= \lim \overline{\sum a_n z^n} = \overline{\lim \sum a_n z^n}$$

$$= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$$

Im nächsten Schritt brauchen wir die Funktionalgleichung der e-Fkt.: $(x \in \mathbb{R})$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = |e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}}$$

$$= e^{ix} e^{\overline{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = \frac{e^{ix}}{e^{ix}} = 1$$

b. $\cos x = \mathrm{Re}\, e^{ix} = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + \overline{e^{ix}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum \frac{(ix)^n}{n!} + \sum \frac{(-ix)^n}{n!}}\right)$$

$$\sum \left( \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

$$\sum \left( \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} - \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

$$= \sum \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} = \sum \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

sin x genauso.

c. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \underbrace{- \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}}_{\frac{x^6}{6!}\left(\frac{x^2}{7\cdot 8} - 1\right)} - \ldots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\left(\frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} - 1\right)$$

und für $x = 2$ ist

$$\frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} < 1,$$

also $\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} < 0$.

d. N sind die Nullstellen des cos zwischen 0 und 2.

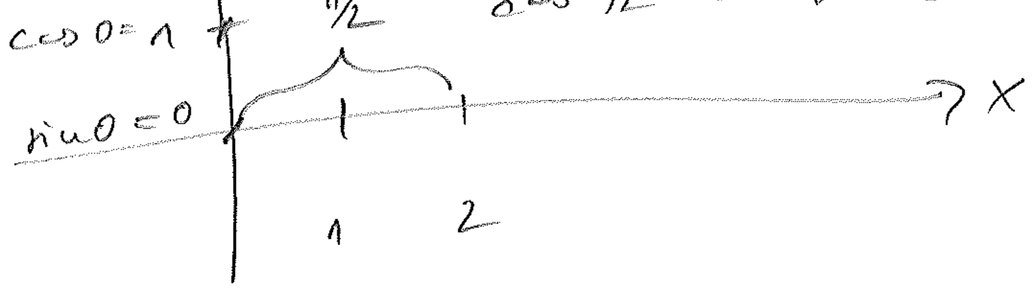
$\cos 0 = 1 > 0 > \cos 2$.

Wegen der Stetigkeit gilt der Zwischenwertsatz und cos hat eine Nst. zw. 0 und 2.

Also ist $N$ nicht leer.
Für die Kompaktheit argumentiert man so: $N$ ist das Urbild der $0$ unter der Einschränkung $f = \cos|_{[0,2]}$. $\{0\}$ ist abgeschlossen, weil $\cos$ stetig ist, auch $f^{-1}[\{0\}]$ in $[0,2]$. Weil $[0,2]$ abgeschlossen ist, ist $f^{-1}[\{0\}]$ aber auch abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Weil es Teilmenge von $[0,2]$ ist, auch beschränkt, also kompakt.

Fazit: $\cos$ hat eine Nst. $\in [0,2]$. Wir wissen, dass:

$\cos \pi/2 = 0 \quad \sin \pi/2 \in \{\pm 1\}$



e. Klar.

f. $\sin x = \underbrace{\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}} + \underbrace{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}} + \dots$

$$\frac{x}{1!}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) \quad \dots$$

$$= x \sum \frac{x^{4m}}{(4m+1)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)}\right)$$

$$\Rightarrow \left( x \in \, ]0,2] \Rightarrow \sin x > 0 \right)$$

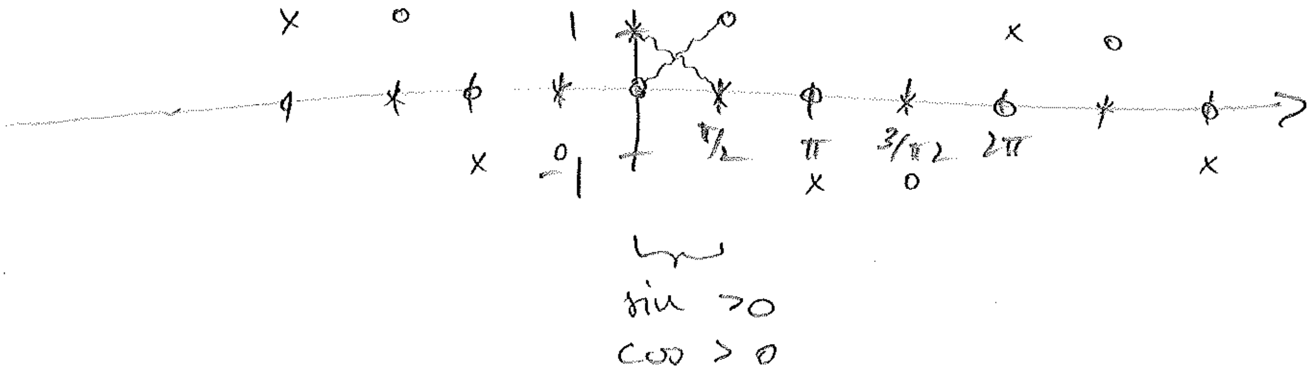
g. $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, weil $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} > 0$.

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = i$$

und damit gilt also:

| $x$ | $e^{i\cdot x}$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $1$ | $0$ |
| $\pi/2$ | $i$ | $0$ | $1$ |
| $\pi$ | $-1$ | $-1$ | $0$ |
| $3/\pi 2$ | $-i$ | $0$ | $-1$ |
| $2\pi$ | $1$ | $1$ | $0$ |
| $5\pi/2$ | $i$ | $0$ | $1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

× $\cos x$, ∘ $\sin x$




Dies haben wir aus der Funktionalgleichung der e-Fkt.
Es folgt aber noch mehr:

u. $$e^{i(x+\pi/2)} = i e^{ix} = i\cos x - \sin x$$

$$\| $$

$$\cos(x+\pi/2) + i\sin(x+\pi/2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \sin(x+\pi/2) \\ -\sin x = \cos(x+\pi/2) \end{cases}$$

Ach ja, <u>und:</u>

$$e^{i(-x)} = \overline{e^{ix}} = \cos x - i\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

i. $x \in ]0,2] \Rightarrow \sin x > 0$ wissen wir schon.

$$\sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi)$$
$$= \sin x$$

$$\Rightarrow \left( x \in [\pi - 2, \pi - 0[ \Rightarrow \sin x > 0 \right)$$

weil $\pi - 2 < 2$, ist also $\sin x > 0$ für $x \in ]0, \pi[$.

j. Damit ist $\pi$ die kleinste positive Zahl, für welche $e^{ix}$ reell ist, und $2\pi$ die kleinste pos. mit $e^{ix} = 1$.

k. Aus dem Zwischenwertsatz haben wir bereits, dass $e^{ix}\big|_{[0,\pi/2]}$ alle $z$ auf dem Viertelkreis $\{ z \mid |z| = 1 \wedge \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z \geq 0 \}$

trifft, also Surjektivität. Es fehlt aber noch die Injektivität.
Dazu nutzen wir wieder die Fkt.gl. der e-Fkt:
Angenommen $\exists\, x, \tilde{x} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit

$$e^{ix} = e^{i\tilde{x}} \Rightarrow e^{i(x-\tilde{x})} = e^0 = 1.$$

Nach j $\Rightarrow x = \tilde{x}$.
Die Sache mit dem Halb- und Ganzkreis folgt dann einfach.

l. $$|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z}| = |e^{\operatorname{Re} z}|\underbrace{|e^{i \operatorname{Im} z}|}_{1}$$

$$e^z = 1 \Rightarrow |e^z| = 1 = e^0 \Rightarrow \operatorname{Re} z = 0$$

m. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist $\frac{z}{|z|}$ auf dem Einheitskreis und erfüllt nach k. von einem

$e^{ix}$ getroffen ( $x \in \mathbb{R}$ ).

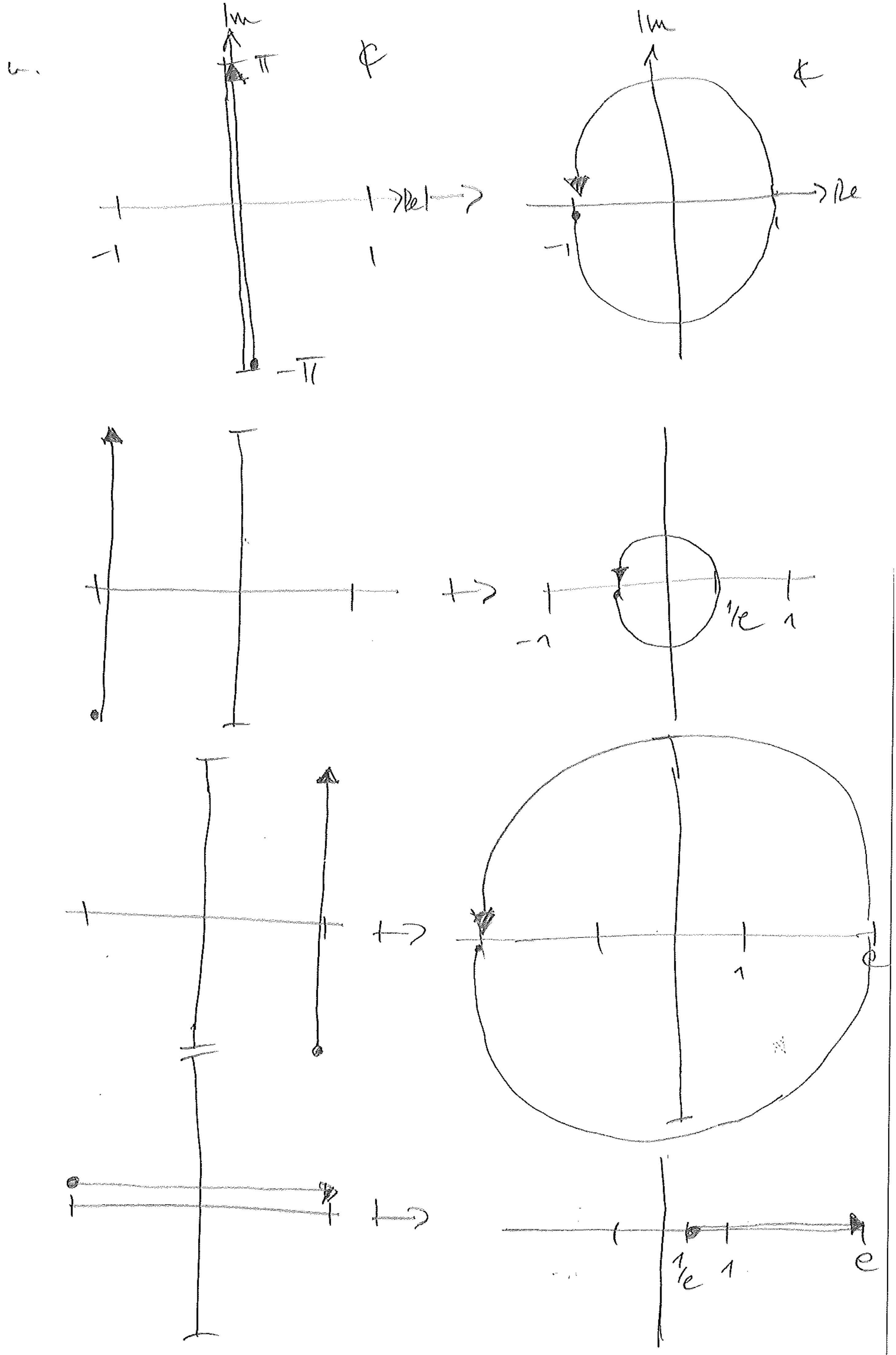
Weil $e^z = e^{\mathrm{Re}\, z + i \,\mathrm{Im}\, z} = e^{\mathrm{Re}\, z} \cdot e^{i\, \mathrm{Im}\, z}$

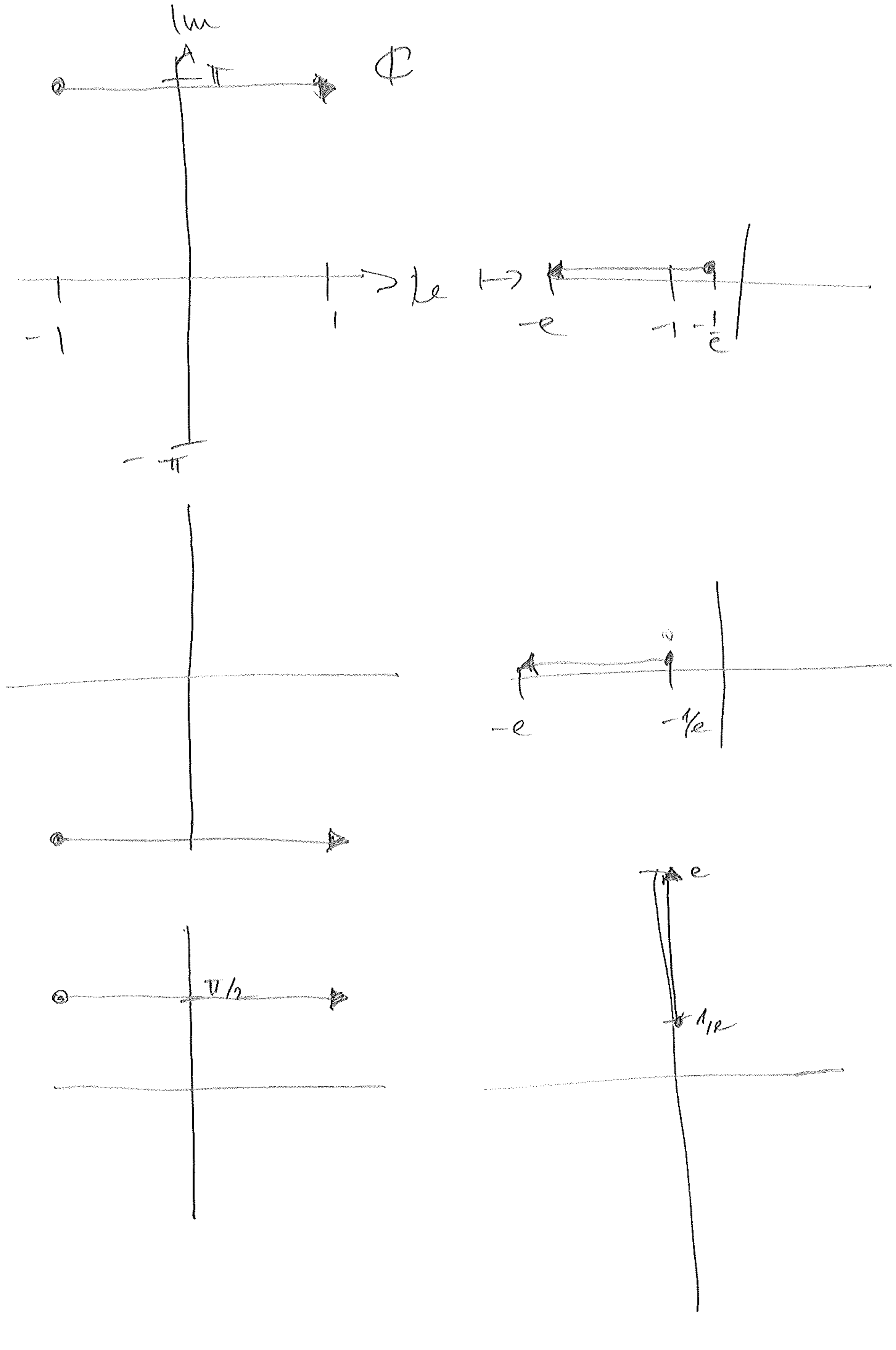
folgt aus $e^y = |z|$ ( $y \in \mathbb{R}$ )

$$e^{y+ix} = |z| \frac{z}{|z|} = z .$$

Bleibt z.z., dass es solch ein $y$ gibt, aber das weiß man aus der Surjektivität der reellen

$$\exp : \mathbb{R} \to \left]0,\infty\right[ .$$


Im
π
ℂ
Re
-1
1
-π
Im
ℂ
Re
-1
1
-1
1/e
1
1
1/e
1
e



Im
ℂ
π
−π
−1
1
↦ e
↦
−e
−1
−1/e
−e
−1/e
π/2
e
1/e