Analysis I Merkl

Lösungsskizze Bl. 9

9.1 Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$.

Setze $\delta := \varepsilon^2$.

Dann gilt $\forall y \in \mathbb{R}$ mit

$$|x-y| < \delta$$

$$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| < \varepsilon.$$

Beweis hierfür:

Sei ~~$y \neq x$ (sonst fertig)~~

~~und~~ zunächst $|y| \geq |x|$.

$$\sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x|}$$

$$2\sqrt{|xy|} \geq 2|x|$$

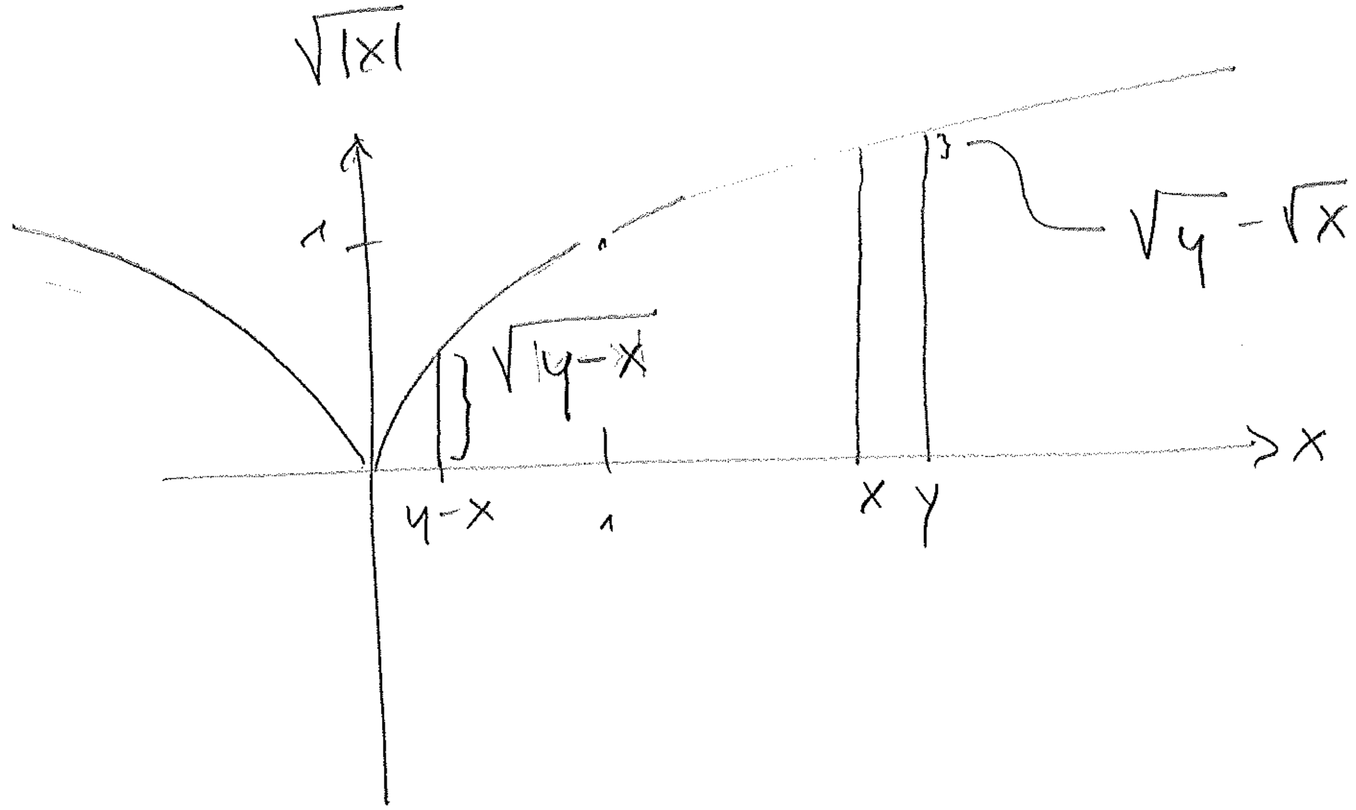
$$|y| - |x| \geq |x| - 2\sqrt{|xy|} + |y|$$

$$\varepsilon = \sqrt{\delta} \geq \sqrt{\underbrace{|y|-|x|}_{\leq |y-x|}} \geq \sqrt{|y|} - \sqrt{|x|}$$

Falls $|x| > |y|$ folgt eben

$$\varepsilon \geq \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}$$

und daraus die Beh.




9.2 Sei $x := \lim_n x_n \in \Pi$

$$\Rightarrow f(x) = f(\lim_n x_n) \overset{\text{stetig}}{=} \lim_n f(x_n) \overset{(*)}{=} \lim_n x_n = x$$

$(*) \Leftarrow (x_1, x_2, x_3 \dots) = (f(x_0), f(x_1), f(x_2) \dots)$

9.3.

a. Wir wissen aus einer Übungsaufgabe, dass

(*) $$\liminf_{i \to \infty} a_i = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{i \geq k} a_i .$$

Da die Folge $\left(\inf_{i \geq k} a_i\right)_k$ monoton steigt, folgt auch

(*) $$\sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{i \geq k} a_i = \lim_{k \to \infty} \inf_{i \geq k} a_i .$$

Wie im Hinweis angegeben, betrachten wir nun die Folgen

$$\left(\inf_{i \geq k} a_{n,i}\right)_k$$

statt $(a_{n,i})_i$. Diese steigen monoton, sind nichtnegativ, also gilt der S. von der mon. Konv.:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \liminf_{i\to\infty} a_{n,i}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lim_{k\to\infty} \inf_{i\geq k} a_{n,i}$$

$$\overset{\text{Satz}}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \inf_{i\geq k} a_{n,i}$$

$$\overset{(**)}{=} \liminf_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \inf_{i\geq k} a_{n,i}$$

$$\overset{(***)}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k} ,$$

wobei (**) gilt, weil

lim = liminf (möglicherw. $= \infty$) bei jeder konvergenten Folge gilt, und (* * *)

aus

$$\inf_{i \geq k} a_{n,i} \leq a_{n,k}$$

folgt.

b. $$\sum_n |b_n|^2 = \sum_n \left| \lim_i a_{n,i} \right|^2$$

$$\overset{\text{Stetigkeit von } |\,|}{=} \sum_n \left( \lim_i |a_{n,i}| \right)^2$$

$$\overset{\text{Stetigk. von }^2}{=} \sum_n \lim_i |a_{n,i}|^2$$

$$= \sum_n \liminf_i |a_{n,i}|^2$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_i \sum_n |a_{n,i}|^2$$

$$\leq \limsup_{i} \sum_{k} |a_{k,i}|^2$$

$$\leq \sup_{i} \sum_{k} |a_{k,i}|^2 ,$$

wobei die letzten beiden $\leq$ immer gelten.

c. Folgende Doppelfolge erschöpft Bsp. 1 und 3:

| $i \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | … |
| 1 | 1 | 0 | 0 | $\ddots$ | |
| 2 | 0 | 1 | 0 | | |
| 3 | 1 | 0 | 0 | | 0 $\ddots$ |
| 4 | 0 | 1 | 0 | | |
| 5 | 1 | 0 | 0 | | |

also:

$$a_{0,i} := \frac{1}{2}\left((-1)^{i} + 1\right)$$

$$a_{1,i} := \frac{1}{2}\left((-1)^{i+1} + 1\right)$$

$$a_{n,i} := 0 \qquad (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow \forall i: \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} = 1$$

$$\forall n: \liminf_{i} a_{n,i} = 0$$

$$n = 0,1: \limsup a_{n,i} = 1$$

$$n \neq 0,1: \limsup a_{n,i} = 0$$

$$\sum_n \liminf_i a_{ni} = 0 < 1 = \liminf \sum a_{ni}$$

$$\sum \limsup a_{ni} = 2 > 1 = \limsup \sum a_{ni}$$

Für Bsp. 2 brauchen wir

eine grundsätzlich andere Situation;

hier ist schon die Vor. der monotonen oder dominierten Konvergenz verletzt:

$a_{ni} := \delta_{ni}$ Tab:

$$\begin{array}{c|cccc} & & & & \\ \hline & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \end{array}$$

$$\sum \limsup \delta_{ni} = \sum 0 = 0 <$$

$$1 = \limsup (1)_i = \limsup \sum \delta_{ni} ,$$

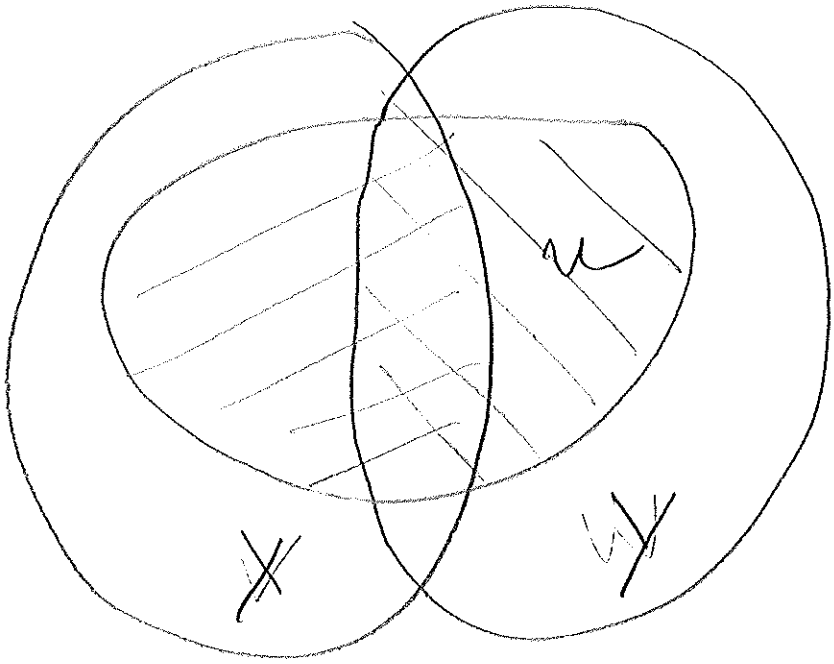
9.4.

a. Gegeben: $M, N, U, X, Y \subseteq \mathbb{C}$

$$M \cup N = U$$

$$X \cap U = M, \quad X \text{ abg. in } \mathbb{C}$$

$$Y \cap U = N, \quad Y \text{ abg. in } \mathbb{C}$$




$/\!/\!/ = M \qquad \backslash\backslash\backslash = N.$

$\Rightarrow$ Sei $V$ offen in $U \Leftrightarrow \exists\, Z$ offen in $\mathbb{C}$ mit $Z \cap U = V$. $\Rightarrow$

$$V \cap M = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{offen}}}{Z} \cap M \quad \text{also offen in } M$$

$$\wedge \quad V \cap N = Z \cap N \quad \text{offen in } N.$$

„$\Leftarrow$" Sei nun $V \cap M$ offen in $M$

$\wedge$ $V \cap N$ offen in $N$

$\Rightarrow \exists \; Z_1, Z_2$ offen in $\mathbb{C}$:

$$Z_1 \cap M = V \cap M$$
$$Z_2 \cap N = V \cap N$$

Gesucht $Z$ offen in $\mathbb{C}$: $Z \cap U = V \cap U$.

(Problem: $Z_1 \cup Z_2$ kann zu groß sein). Setze

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{offen}}}{Z} := \underbrace{(Z_1 \setminus Y)}_{\text{offen, weil } Y \text{ abg.}} \cup \underbrace{(Z_2 \setminus X)}_{\text{offen}} \cup (Z_1 \cap Z_2)$$

$$\Rightarrow Z \cap U = Z \cap (N \cup M)$$
$$= V \cap U.$$

b. Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ offen in $\mathbb{C}$.

$f|_N : N \to \mathbb{C}$ die Einschränkung auf $N$

$f|_M : M \to \mathbb{C}$ — " — auf $M$.

Aus der Stetigkeit folgt:

$f|_N^{-1}([V])$ ist offen in $N$

$f|_M^{-1}([V])$ — " — $M$

außerdem gilt:

$f|_N^{-1}([V]) = f^{-1}([V]) \cap N$,

$M$ genauso,

$\overset{a.}{\Rightarrow} f^{-1}([V])$ offen in $U$.

$\Rightarrow f$ stetig.

c. Dies ist ein Äquivalent zu b. unter der Voraussetzung, dass $\mathcal{U}$ von offenen Mengen überdeckt wird. Anders als in b. brauchen wir hier keine Vorüberlegung (das war a.), weil das wegen „$M_i$ offen

$\Rightarrow$ ($V \cap M_i$ offen in $M_i$

$\Leftrightarrow$ $V \cap M_i$ offen in $\mathbb{C}$)".

viel einfacher ist.

---

Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ offen.
So gilt $\forall i$:

$f_i^{-1}([V])$ offen in $M_i$

$\Rightarrow$ —"— in $\mathbb{C}$ (weil $M_i$ offen)

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}([V]) = f^{-1}([V])$

offen in $\mathbb{C}$. $\Rightarrow$ $f$ stetig.

d. Allgemein gilt:

$f$ stetig

$\Leftrightarrow \forall W \subseteq \mathbb{C}$ abg $\Rightarrow$

$f^{-1}([W])$ abg.

---

$f, g$ stetig $\Rightarrow h: f-g$ stetig.

Weil $\{x \mid x \geq 0\}$ und

$\{x \mid x \leq 0\}$ abg. sind,

$\Rightarrow M, N$ abg. in $M$.

---

$$f \wedge g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M \\ g(x) & \text{falls } x \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow f \wedge g|_M = f \; ; \; f \wedge g|_N = g$

mit b. folgt die Beh.