Analysis I Dekl

Lösungsskizze Bl. 8

8.1. a. Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{n!^2}{(2n)!}}$$

$$= \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{2n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Also konvergiert die Reihe.

b. $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\binom{2n+2}{n+1} 9^{-n-1}}{\binom{2n}{n} 9^{-n}}$$

$$= \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{2}{3} \leq \frac{4}{3} < 1.$$ Also auch.

c. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$$

$$= 2\sum_0^{\infty} \frac{1}{2^n} + 4\sum_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1-2} + 4\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

2.8. Sei x fest. Auch hier verwenden wir das Quotientenkrit.:

für $n \geq 4|x|^2$

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n!}}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ Konvergenz für alle x $\Rightarrow$ r $= \infty$.

8.3. Es gilt:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

und

$$0 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)^k}$$

$$= \frac{1}{(m+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{m+2}} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+1}$$

Nun wähle man m so groß, dass $\frac{1}{(m+1)!} < 10^{-6}$ und berechne

$$e \approx \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

(Ich habe keinen Taschenrechner.)

8.4.

$$e^{\lambda n} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^\ell}{\ell!}$$

$$\overset{\lambda n > 0}{>} \frac{(\lambda n)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Dies ist die 2. ~~Zeile~~.

$$\Rightarrow 0 \leq n^k e^{-\lambda n} < \frac{1}{n} \lambda^{-k-1} (k+1)!$$

Bei festen λ und k geht die rechte Seite nach 0 für $n \to \infty$.

8.5 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potr. mit Konvrad.

r, $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < r$ und

$(y_k)_k$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit

$\lim y_n = 0$. O.B.d.A. können

wir annehmen, dass auch

$\forall k \quad |x + y_k| < r$.

Oups:
Auf dem Blatt
heißt das
$x + y_k = x_k$

Jetzt ist z.z.:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + y_k)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Betrachte für festes k

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n (x + y_k)^n - a_n x^n \right].$$

Dies kann geschrieben werden

als Potreihe in y_k, d.h.

$\exists\, c_n \in \mathbb{C}$:

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_k^n ,$$

und außerdem gilt: $c_0 = 0$
(weil sich die Summanden ohne y_k grade rausstreichen).

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_k^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_k^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} y_k^{n+1} = y_k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} y_k^n$$

Wir können also einmal y_k ausklammern. Sei nun $|y_l| < |y_k|$.
Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{n+1}| \, |y_l^n| =: M < \infty .$$

Und für j so groß, dass

$|y_j| \leq \max\left(\frac{\varepsilon}{M}, |y_\ell|\right)$ folgt

$$\left| y_j \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} y_j^n \right| \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Also gilt

$$\lim_{k\to\infty} (*) = \lim_{k\to\infty} y_k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} y_k^n = 0$$

und das war z.z.

8.6. Die Motivation für diese Aufgabe ist offensichtlich! Wir setzen in die Potr. $\sum a_n x^n$ statt x $(y+z)$ ein und lösen nach z auf:

$$a_0 + a_1(y+z) + a_2(y^2+2yz+z^2)$$
$$+ \ldots + a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k z^{n-k} + \ldots$$

$$= (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots) +$$
$$(a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 + \ldots) z +$$
$$(a_2 + \ldots) z^2 + \ldots$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} a_n y^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1} y^n\right) z +$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} a_{n+2} y^n\right) z^2 + \ldots$$

Damit ist scheinbar alles klar, was in der Aufgabe verlangt wird, aber noch nichts bewiesen.

a. Dies ist wildes Umsortieren (vorsicht: Ist nur mit Betragsstrichen erlaubt.)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left| \binom{l+k}{k} a_{l+k} y^{l} z^{k} \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \binom{n}{k} a_n y^{n-k} z^{k} \right|$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} a_n y^{n-k} z^{k} \right|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left| a_n (y+z)^n \right| \le \sum |a_n| (|y|+|z|)^n$$

$$< \infty, \text{ weil } |y+t| \le |y|+|z| < r.$$

Bei (*) geht ein, über welche Paare (n,k) summiert wird: $\{k, n \in \mathbb{N}_0 \mid k \leq n\}$;

$n \backslash k$	0	1	2	3
0	x			
1	x	x		
2	x	x	x	
3	x	x	x	x

b. Für $|z| < r - |y|$ haben wir genau unsere Voraussetzung $|y|+|z| < r$.

Und für $x = y+z$ gilt $|x| = |y+z| \leq |y| + |z| < r$,

$\sum a_n x^n$ konvergiert also.

Wir haben in a. gesehen, dass

$\sum a_n x^n$ und $\sum b_n z^n$

durch Umsortieren auseinander
hervorgehen. Weil sie wohl
dazu absolut konvergieren,
folgt die Gleichheit.