Math. Analysis I. Lösungsskizze. Blatt 7.

7.1. Wir erinnern: $\lim a_n = a$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \ni a_n$ für

fast alle n.

Seien nun

$$\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}$$

und $\varepsilon > 0$.

1. Fall. $a_n \in U_\varepsilon(\limsup a_n)$

für fast alle n. Fertig.

2. Fall. Es gibt ∞ viele n:

(*) $$a_n \in \mathbb{R} \setminus U_\varepsilon(\limsup a_n).$$

Sagen wir o.B.d.A.

$$a_n \geq \limsup a_n + \varepsilon$$

für ∞ viele n. Diese a_n bilden eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$. Diese wiederum hat einen HP $\geq \limsup a_n + \varepsilon$. Dieser HP ist auch HP von $(a_n)_n$, also war $\limsup a_n$ nicht der größte. Widerspruch: Der 2. Fall ist unmöglich.

7.2. Sei $s := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.
Dieses existiert in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

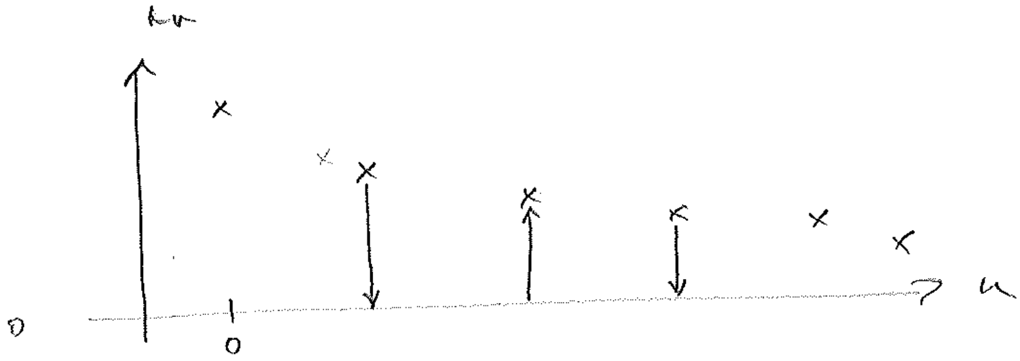
1. Fall: $s < \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$. Weil s kl. o. Schranke
$\exists m: a_m > s - \varepsilon$.
Aus der Monotonie folgt
$\forall n \geq m: a_n \geq a_m > s - \varepsilon$.
Weil s o. Schranke, gilt
$\forall n: a_n \leq s$.

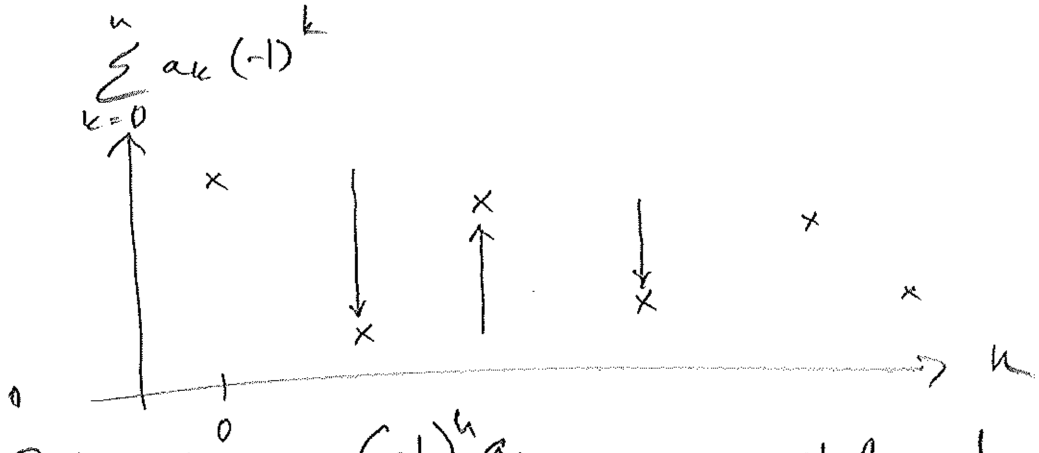
$\Rightarrow \forall n \geq m: a_n \in U_\varepsilon(s)$.

2. Fall: $s = \infty$.
Sei U Umgebung von ∞.
Dann gibt es ein M sodass
$\{x \mid x \geq M\} \subset U$.
Wegen $\sup\{a_n\} = \infty$ gibt es
ein $m: a_m \geq M$.
$\Rightarrow \forall n \geq m: a_n \geq a_m \geq M$.
$\Rightarrow a_n \in U$.

7.3. Dies ist das sogen. <u>Leibnizkriterium</u>.

Das Bild zum Verständnis:





Setze $b_n := (-1)^n a_n$. Wir zeigen durch vollst. Ind.!

$\forall k:$

$\forall m \geq k:$

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{2k+1} b_n \leq \sum_{n=0}^{2m+1} b_n \leq \sum_{n=0}^{2m} b_n \leq \sum_{n=0}^{2k} b_n$$

Anfang: $m = k$

$$\sum_{n=0}^{2k+1} b_n \le \underbrace{b_{2k}}_{\ge 0} + \sum_{n=0}^{2k+1} b_n = \sum_{n=0}^{2k} b_n$$

Schritt: $m \Rightarrow m+1$

$$\sum_{n=0}^{2k+1} b_n \overset{V.}{\le} \sum_{n=0}^{2m+1} b_n \le \underbrace{b_{2m+2}+b_{2m+3}}_{a_{2m+2}-a_{2m+3} \ge 0} + \sum_{n=0}^{2m+1} b_n$$

$$= \sum_{n=0}^{2m+3} b_n \le \underbrace{-b_{2m+3}}_{a_{2m+3} \ge 0} + \sum_{n=0}^{2m+3} b_n = \sum_{n=0}^{2m+2} b_n$$

$$\le \underbrace{-b_{2m+2} - b_{2m+1}}_{-a_{2m+2}+a_{2m+1} \ge 0} + \sum_{n=0}^{2m+2} b_n = \sum_{n=0}^{2m} b_m$$

$$\overset{V.}{\le} \sum_{n=0}^{2k} b_n$$

Damit ist die Folge

$\left(\sum_{n=0}^{\ell} b_n \right)_\ell$ Cauchyfolge.

(Wähle k so groß, dass

$\sum_{n=0}^{2k} b_n - \sum_{n=0}^{2k+1} b_n = a_{2k} < \varepsilon$.)

Die Ungleichung von Blatt 6

folgt aus (*) mittels der

allgemeinen Regel für eine konv.

Folge $(c_n)_n$:

$\forall n: \alpha \leq c_n \leq \beta$

$\Rightarrow \alpha \leq \lim c_n \leq \beta$.

7.4 Wir erinnern uns:

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

... und verwenden das Quotientenkrit.:

Es gilt für n groß genug:

$$\left|\frac{a-n+1}{n}\right| \leq \frac{1+\frac{1}{|x|}}{2} > 1$$

(falls $x \neq 0$, sonst ist nichts z. z.)

$$\Rightarrow \left|\frac{\binom{a}{n}x^n}{\binom{a}{n-1}x^{n-1}}\right| = \left|\frac{a-n+1}{n}x\right|$$

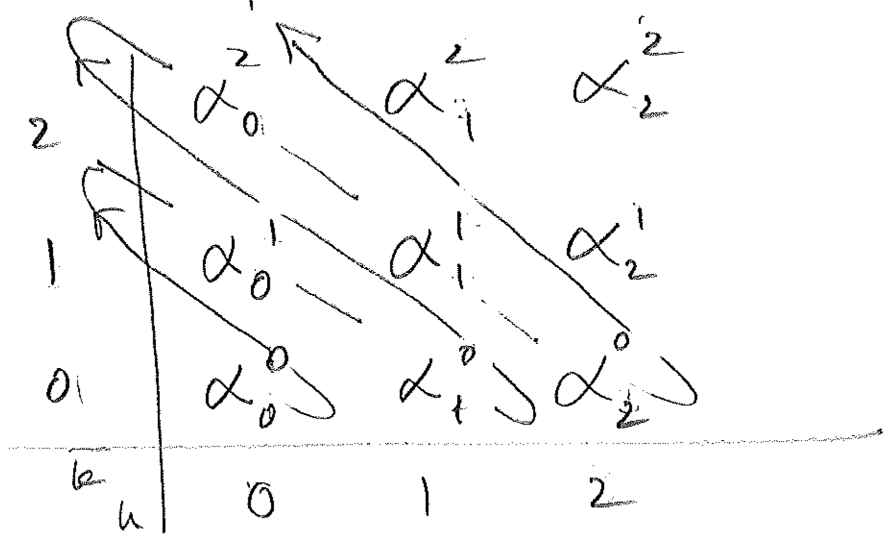
$$\leq \frac{1+|x|}{2} < 1$$

Nach dem Quot.-krit. konvergieren also

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{a}{n}x^n\right| \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n.$$

7.5 Wir verwenden den Umordnungssatz bezüglich folgender Umordnung:

Zunächst zählen wir die Menge $\{\alpha_n^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ folgendermaßen ab:



Also:

$$(\alpha_0^0; \alpha_0^1; \alpha_1^0; \alpha_0^2; \alpha_1^1; \alpha_2^0; \dots)$$

und nennen die so gewonnene Folge $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Also: $\beta_0 = \alpha_0^0$; $\beta_1 = \alpha_0^1$, $\beta_2 = \alpha_1^0 \dots$

Nach dem Satz gilt jetzt

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i| = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n^k| .$$

Setze nun $\alpha_n^k := a_n b_k x^{n+k}$

mit a, b, x aus der Angabe; $|x| < \min(r_1, r_2)$.

Es folgt

$$\sum_k \sum_n |a_n b_k x^{n+k}|$$

$$= \sum_k |b_k x^k| \sum_n |a_n x^n| < \infty$$

wegen der absoluten Konvergenz beider Potenzreihen.

Also ist der Satz auch ohne Betragstriche erfüllt.

Weiter gilt:

$$g(x)\cdot f(x) \overset{\text{Def}}{=} \sum_k b_k x^k \sum_n a_n x^n$$

$$= \sum_k \sum_n b_k x^k a_n x^n$$

$$\underset{(*)}{\overset{\text{Satz}}{=}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\ell} b_j a_{\ell-j} x^{\ell} ,$$

wobei wir bei (*) genau die Umsortierung vorgenommen haben wie vorher mit β und α.

7.6 Wir verwenden unseren Satz von der dominierten Konvergenz. Gilt der Schreibweise des Satzes ist

$$a_k^{(n)} = \exp\left(-n + i\frac{n^2}{k}\right).$$

Wir wollen also eine von k unabhängige Majorante $b^{(n)}$ für $a_k^{(n)}$. D.h.

$$\forall k\ \forall n:\ b^{(n)} \geq |a_k^{(n)}|,$$

und $\sum_n b^{(n)} < \infty$.

Betrachte also $|a_n^{(n)}| =$

$$|\exp(-n)| \cdot \underbrace{\left|\exp\left(i\frac{n^2}{k}\right)\right|}_{\leq 1}$$

$$\leq \underbrace{\left(\frac{1}{e}\right)}_{<1}^{n}$$

Nach der geom. R.-Formel

ist $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-1/e} < \infty$,

also sind die Voraussetzungen

des Satzes erfüllt:

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-n + i\frac{n^2}{k}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} \exp\left(-n + i\frac{n^2}{k}\right)$$

Stetigkeit der exp.-F.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\Big(\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(-n + i\frac{n^2}{k}\right)}_{=-n}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-1/e} = \frac{e}{e-1}$$