Merks. Ana 1. Blatt 6. Lösungsvorschlag.

6.1 Diese wunderschöne Aufgabe beweist die alte Weisheit „eine Exponentialfunktion steigt schneller als ein Polynom".

(Bzw. hier eben „fällt schneller", weil $|a| < 1$.)

Wir interessieren uns für den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Folgeglieder:

$$\frac{(n+1)^k \, a^{n+1}}{n^k \, a^n}.$$

Zunächst:

$$\frac{(n+1)^k}{n^k} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^k} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k}$$

Bernoulli

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{k}{n+1}} = \frac{n+1}{n+1-k} = 1 + \underbrace{\frac{k}{n+1-k}}_{\to 0}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 1$$

(Das sehen wir als bekannt voraus!)

Damit ist es möglich, $m$ so groß zu wählen, dass für $n \geq m$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $1-\varepsilon > |a|$, gilt:

$$\frac{(n+1)^k}{n^k} < \frac{1-\varepsilon}{|a|}, \text{ also } \quad (*)$$

$$\left| \frac{(n+1)^k a^{n+1}}{n^k a^n} \right| < 1-\varepsilon =: q < 1$$

(Zu (*): Das $\varepsilon$ wird nur eingeführt, damit unser $q$ strikt $< 1$ ist.)

Damit ist der Quotient ~~zweier~~ aufeinanderfolgender Glieder $< q < 1$, und wir sind fertig, denn: Entweder man argumentiert noch und mit Bernoulli, dass

$$q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ und}$$

$$|n^k a^n| < |m^k a^m| q^{m-n}, \text{ also}$$

$$|n^k a^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(damit fertig), oder:

man argumentiert mit der geometrischen Reihe und zeigt sogar mehr, nämlich dass:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^k a^n| < \sum_{n=1}^{m-1} |n^k a^n| + \sum_{n=m}^{\infty} q^n,$$

und dies konvergiert, und damit muss unsere Folge

$$n^k a^n \longrightarrow 0.$$

(Ich glaube aber, den Stoff haben wir noch nicht, wir hätten damit aber sogar gezeigt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k a^n$$

konvergiert.)

6.2 Dies gilt mit Partialbruch-

zerlegung:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

mit $A, B, C \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow 1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1) = 1$$

$$\Rightarrow \quad A + B + C = 0$$

$$3A + 2B + C = 0$$

$$2A = 1$$

$$\Rightarrow A = C = \frac{1}{2}, \quad B = -1.$$

Es gilt damit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} \right) = \frac{1}{4},$$

denn:

Mit vollständiger Ind. (oder etwas schlampig mit dem Kasten)

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\frac{1/2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1/2}{3} \\
+ \quad \frac{1/2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1/2}{4} \\
+ \quad \quad \frac{1/2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1/2}{5} \\
+ \quad \quad \quad \frac{1/2}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1/2}{6} \\
\quad \quad \quad \quad \ddots
\end{array}
}
$$

$$\boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 0 + 0 + \ldots \text{Rest}}$$

sieht man: für $\forall k \geq 3$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

$$\overset{\text{Def}}{=} \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left( \underbrace{\frac{1/2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1/2}{2}}_{1/4} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} - \frac{1/2}{k+1} + \underbrace{\sum_{n=3}^{k} \underbrace{\frac{1/2}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1/2}{n}}_{0}}_{0} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + \underbrace{\lim_{k \to \infty} \left( -\frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} - \frac{1/2}{k+1} \right)}_{0}$$

6.3 Sei zunächst $(a_n)_n$ nach oben beschränkt.

Wir verwenden das

$$K := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists m \, \forall n \geq m : a_n \leq x\}$$

ähnlich dem Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß. (Nur hier mit „$a_n \leq x$" statt „$a_n \geq x$").

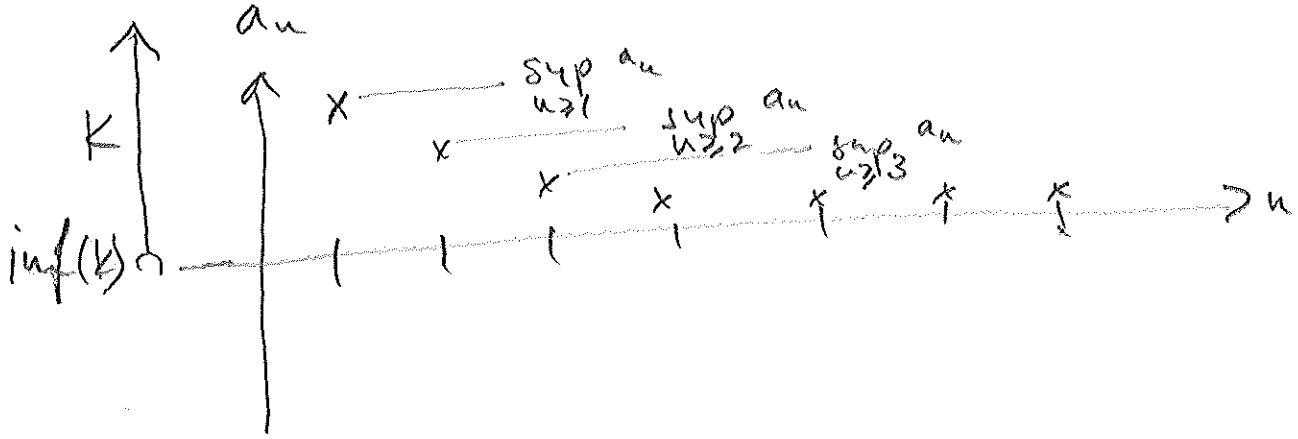
In Aufgabe 5.5 haben wir gesehen, dass

$$\inf(K) = \limsup_{n \to \infty}(a_n)$$

der größte Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist. (Dort war es der kleinste, aber der größte geht genauso.) Es bleibt z.z.:

$$\inf(K) = \inf\{\sup_{n \geq m} a_n \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Skizze zur Veranschaulichung:




---

1. Schritt: „$\inf(K) \le \inf\{\sup_{n\ge m} a_n\}$"

Beweis hierfür:

$x = \sup_{n\ge m} a_n \Rightarrow \forall n\ge m: a_n \le x$

$\Rightarrow x \in K$

Also $K \supset \{\sup_{n\ge m} a_n\}$. $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ Beh.

2. Schritt: „$\inf(K) \ge \inf\{\sup_{n\ge m} a_n\}$"

Beweis hierfür:

Sei $x \in K$ bel. $\Rightarrow \exists m\ \forall n\ge m: a_n \le x$

$\overset{(**)}{\Rightarrow} x \ge \sup_{n\ge m} a_n \Rightarrow$ Beh.

(*) Hier geht ein, dass $\inf K$ untere Schranke von $K$ ist.

(**) Hier geht ein, dass $\sup a_m$ kleinste obere Schranke ist.

Sei nun $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt. D.h.

$$\forall \Pi \in \mathbb{R}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \geq m: a_n \geq \Pi$$

~~Dann~~ ist

$$\forall m: \sup_{n \geq m} a_n = \infty,$$

und $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ nach Defi.

6.4. a)

$$\frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} = \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n}$$

$$= x_{n+1} - \sqrt{a}$$

b) $$\Delta_n = \frac{\Delta_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \geq 0$$

$$\Delta_n < x_n$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_n^2}{2x_n} < \frac{\Delta_n}{2}$$

c) Weil $0 \le \Delta_{n+1} \le \frac{1}{2} \Delta_n$

$\Rightarrow \Delta_k \le \frac{1}{2^k} \Delta_0$

$\Rightarrow \Delta_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$,

$\Rightarrow x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \sqrt{a}$

d) $0 < \Delta_0 < 1$, und $\frac{1}{2^{17}} = \frac{1}{131072}$

Also ist $\Delta_{17} < 10^{-6}$.

6.5 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$ und $M \neq \mathbb{R}$. z.z.: $M$ ist nicht zugleich offen und abg..

Betrachte dazu $x \in M$ und

$$S := \{ y \geq x \mid [x, y] \subseteq M \},$$

$$S' := \{ y' \leq x \mid [y', x] \subseteq M \}.$$

Es gilt entweder $\sup S < \infty$ oder $\inf S' > -\infty$, da sonst $M = \mathbb{R}$. Sagen wir, $\sup S =: s < \infty$.

Behauptung: $s$ ist Randpunkt von $M$. Beweis hierfür:

Sei $\varepsilon > 0$. Damit $U_\varepsilon(s) \cap M \neq \emptyset$ (weil $U_\varepsilon(s) \ni y$ mit $[x, y] \subseteq M$) und $U_\varepsilon(s) \setminus M \neq \emptyset$ (weil aus $[s, s+\varepsilon] \subseteq M$ folgen würde, dass $s+\varepsilon \in S$ im Wid. zu $s = \sup(S)$).

$\Rightarrow \quad s \in \partial M.$

Wir wissen:

$M$ offen $\Leftrightarrow M \cap \partial M = \emptyset$

$\wedge$ $M$ abg $\Leftrightarrow M \supseteq \partial M$.

~~Also~~, falls $M$ offen $\wedge$ abg.,

$s \in M$ und $s \notin M$. Wid.

6.6 Diese wunderschöne Aufgabe ist gemacht für allgemeine top. Räume (nicht nur für $\mathbb{R}$, sonst wäre die Arbeit mit Heine-Borel erledigt). Insofern gilt es zu beachten, wie „abgschl." allgemein definiert wird:

$A \subseteq \Omega$ abg $:\Leftrightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$.

(Im Allgemeinen ersetzt eben das „$\in \mathcal{T}$" das Wort „offen".)

<u>Bew der Aufgabe</u>.

Sei $\Omega$ kompakt und $A \subseteq \Omega$ mit $\Omega \setminus A \in \mathcal{T}$.

Betrachte offene Überdeckung von $A$. D.h. $A_i \in \mathcal{T}$ mit

$$\bigcup_{i \in I} A_i \supset A$$

Daraus machen wir eine offene Überd. von $M$:
Es gilt

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup (M \setminus A) \supset M \quad (*)$$

(klar), und alle beteiligten Mengen links sind $\in \tau$.
Weil $M$ kompakt, können wir in $(*)$ auf fast alle Mengen verzichten. D.h.
$\exists$ endliches $\tilde{I} \subseteq I$:

$$\left(\bigcup_{i \in \tilde{I}} A_i\right) \cup (M \setminus A) \supset M.$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in \tilde{I}} A_i \supset A.$$

$\Rightarrow$ $A$ wird endlich überdeckt, ist also kompakt.