Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 5

5.1. Bild zur stereographischen Projektion: Skript, S. 34

a) ~~$f: \mathbb{C} \to$~~ $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2$

Für $a+ib \in \mathbb{C}$ ist $f(a+ib)$ der Schittpunkt von

$$\left\{ (1-t)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}ta\\tb\\(1-t)\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ mit } S^2$$

D.h. gesucht ist $t \in \mathbb{R}$ mit $(ta)^2 + (tb)^2 + (1-t)^2 = 1$

Es gilt: $t^2a^2 + t^2b^2 + (1-t)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow t^2(a^2+b^2+1) - 2t + 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t\left(t(a^2+b^2+1) - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{2}{a^2+b^2+1}$$

$t=0$ ergibt den Nordpol, d.h. $t = \frac{2}{a^2+b^2+1}$ ergibt den ges. Schnittpunkt

D.h.:
$$f(a+ib) = \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right) \quad \text{f. } a, b \in \mathbb{R}$$
$$f(\infty) = (0,0,1)$$

b) $f^{-1}: S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Für $(x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\}$ ist $f^{-1}((x,y,z))$ der Schnittpunkt von

$$\left\{ (1-t)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}tx\\ty\\1-t+tz\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ mit } E = \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

D.h. gesucht ist $t \in \mathbb{R}$ mit $1-t+tz = 0$

Wegen $1-t+tz = 0 \Leftrightarrow 1 = t(1-z) \Leftrightarrow t = \frac{1}{1-z}$ (Wegen $(x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\}$ ist $z \neq 1$!) folgt:

$$f((x,y,z)) = \begin{cases} \infty & \text{für } (x,y,z) = (0,0,1) = N \\ \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right) & \text{für } (x,y,z) \in S^2 \setminus \{N\} \end{cases}$$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 5

5.2. Wd. Definitionen:

- $\mathcal{U}$ ist Umgebung von x $:\Leftrightarrow$ x innerer Punkt von $\mathcal{U}$
  $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{U}$
- x innerer Punkt von M $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq M$
- x Berührpunkt von M $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$
- x Randpunkt von M $:\Leftrightarrow$ x Berührpunkt von M und von $\mathbb{C}\setminus M$
  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \wedge M \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$

a) z.z.: x innerer Punkt von M $\Leftrightarrow$ es gibt Umgebung $\mathcal{U}$ von x mit $\mathcal{U} \subseteq M$

„$\Rightarrow$": x innerer Punkt von M
$\overset{\text{Def}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq M$
Wähle also $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\varepsilon(x)$, nach Satz 2.8 ist $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ offen, also x innerer Punkt von $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$, d.h. $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ Umgebung von x

„$\Leftarrow$": Es gibt ~~Sei~~ $\mathcal{U}$ Umgebung von x mit $\mathcal{U} \subseteq M$ (Vor.)
Es gibt $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{U}$ (Definition Umgebung)
wg. $\mathcal{U} \subseteq M$ gilt dann: $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq M$

b) z.z.: x Berührpunkt von M $\Leftrightarrow$ für alle Umgebungen $\mathcal{U}$ von x gilt: $\mathcal{U} \cap M \neq \emptyset$

„$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{U}$ Umgebung von x, dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{U}$.
Weil ~~Wegen~~ x Berührpunkt von M ist, gilt: $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$
Also folgt: $\mathcal{U} \cap M \supseteq \mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$, d.h. $\mathcal{U} \cap M \neq \emptyset$

„$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0$. z.z.: $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$. Das gilt nach Vor. weil $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ Umgebung von x ist.

c) x Randpunkt von M
$\Leftrightarrow$ x Berührpunkt von M und x Berührpunkt von $\mathbb{C}\setminus M$
nach Definition

$\Leftrightarrow$ jede Umgebung von x trifft M und jede Umgebung trifft $\mathbb{C}\setminus M$
Teilaufg. b) für M und $\mathbb{C}\setminus M$ $\Leftrightarrow$ jede Umgebung trifft M und $\mathbb{C}\setminus M$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 5

5.3. Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$, U offen

a) z.z. $U \cap \overline{V} \subseteq \overline{U \cap V}$

Beweis: Sei $x \in U \cap \overline{V}$

z.z.: $x \in \overline{U \cap V}$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$

Sei $\varepsilon > 0$.

Es gibt $\tilde{\varepsilon} > 0$ mit $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ und $U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \subseteq U$ weil U offen ist und $x \in U$

[$\exists\, \varepsilon_0 > 0$ mit $U_{\varepsilon_0}(x) \subseteq U$ nach Def. offen, dann $\forall \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0] : U_{\varepsilon_1}(x) \subseteq U$, also kann $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ gewählt werden]

Wegen $x \in \overline{V}$ gilt: $U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \cap V \neq \emptyset$

Es folgt:

$$U_\varepsilon(x) \cap (U \cap V) \underset{\substack{\uparrow \\ U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \subseteq U,\ \cap \text{ ist assoziativ}}}{\supseteq} (U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \cap U) \cap V \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wg. } U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \subseteq U}}{=} U_{\tilde{\varepsilon}}(x) \cap V \underset{\substack{\uparrow \\ x \in \overline{V}}}{\neq} \emptyset$$

Also: $U_\varepsilon(x) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$

b) Setze: $U = \{0\}$ (nicht offen!)

$V = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Dann $\overline{V} = \mathbb{C}$, d.h. $U \cap \overline{V} = \{0\}$,

aber $U \cap V = \emptyset$, d.h. $\overline{U \cap V} = \emptyset$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 5

5.4. $k : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z \mapsto k(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{f. } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ \infty & \text{f. } z = 0 \\ 0 & \text{f. } z = \infty \end{cases}$

z.z.: $\forall A \subseteq \mathbb{C}\cup\{\infty\} : (A \text{ offen} \Leftrightarrow k[A] \text{ offen})$ (jeweils in $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$)

Sei $A \subseteq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Wir zeigen zunächst: $k[A]$ offen $\Rightarrow$ A offen

Sei also $k[A]$ offen und $z_0 \in A$, gesucht ist Umgebung U von z_0 mit $U \subseteq A$.

1. Fall $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. z.z.: $\exists \delta > 0 : U_\delta(z_0) \subseteq A$

Weil $k[A]$ offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ so dass $U_\varepsilon(k(z_0)) \subseteq k[A]$

Ohne Einschränkung können wir $\varepsilon \leq |k(z_0)| = |\frac{1}{z_0}|$ wählen.

Gesucht ist $\delta > 0$, ~~so dass mit $\delta < |z_0|$~~, so dass:

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |k(z) - k(z_0)| < \varepsilon \qquad (*)$$

Dann gilt nämlich für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in U_\delta(z_0) \overset{(*)}{\Rightarrow} k(z) \in U_\varepsilon(k(z_0)) \Rightarrow k(z) \in k[A] \Rightarrow z \in A$$

Also $U_\delta(z_0) \subseteq A$.

Zu (*): Wähle $\delta = \dfrac{\varepsilon |z_0|^2}{1 + \varepsilon |z_0|}$ (Grund für diese Wahl: s.u.)

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$.

Wegen $\delta = \dfrac{\varepsilon |z_0|^2}{1+\varepsilon|z_0|} \leq \dfrac{|z_0|}{2} \Leftrightarrow \varepsilon |z_0| \leq \frac{1}{2}(1 + \varepsilon|z_0|) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\varepsilon|z_0| \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \varepsilon \leq \dfrac{1}{|z_0|}$, was nach Wahl von ε gilt,

folgt insbesondere $z \neq 0$. Dann

$$|k(z) - k(z_0)| = \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \frac{|z_0 - z|}{|z_0|\cdot|z|} \overset{(1)}{\leq} \frac{\delta}{|z_0|(|z_0| - \delta)} \overset{(2)}{=} \varepsilon,$$

zu (1): Wegen $|z_0| = |z_0 - z + z| \leq |z_0 - z| + |z|$ gilt: $|z| \geq |z_0| - |z_0 - z| > |z_0| - \delta > 0$ (wg. $\delta \leq \frac{|z_0|}{2}$)

und $|z_0 - z| < \delta$

zu (2): Begründet Wahl von δ:

$$(2) \Leftrightarrow \delta = \varepsilon|z_0|^2 - \varepsilon\delta|z_0| \Leftrightarrow \delta(1 + \varepsilon|z_0|) = \varepsilon|z_0|^2 \Leftrightarrow \delta = \frac{\varepsilon|z_0|^2}{1+\varepsilon|z_0|}$$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 5

5.4. Fortsetzung:

2. Fall: $z_0 = 0$, z.z.: $\exists \delta > 0 : U_\delta(0) \subseteq A$

Dann $k(z_0) = \infty$; wegen $k[A]$ offen gibt es also $r > 0$ mit

$\forall w \in \mathbb{C} : |w| > r \Rightarrow w \in k[A]$.

Setze also $\delta = \frac{1}{r}$.

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$|z| < \delta = \frac{1}{r} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| > r \Rightarrow \frac{1}{z} \in k[A] \Rightarrow z \in A$

Also $U_\delta(0) \subseteq A$.

3. Fall: $z_0 = \infty$ z.z.: $\exists r > 0 \; \forall z \in \mathbb{C} : |z| > r \Rightarrow z \in A$.

Wegen $k[A]$ offen und $k(z_0) = 0$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subseteq k[A]$

Setze $r = \frac{1}{\varepsilon}$

Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$|z| > r \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| \in k[A] \Rightarrow z \in A$.

In allen Fällen findet man also eine offene Umgebung von z_0, die in A enthalten ist, d.h. A offen.

zu: A offen $\Rightarrow$ $k[A]$ offen

Wegen $k^{-1} = k$ (Sprechweise: „k ist Involution") ~~und $k^{-1}[k[A]] = A$~~ folgt diese Richtung aus dem anderen Richtung.

In der Tat:

A offen $\Rightarrow A = k[k^{-1}[A]]$ offen $\overset{\text{schon gezeigt}}{\Rightarrow} k^{-1}[A]$ offen

$\underset{k = k^{-1}}{\Rightarrow} k[A] = k^{-1}[A]$ offen

□

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 5

5.5. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

Sei $K = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m : a_n \geq x\}$

$\sup K$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Vorlesung)

z.z.: $\sup K$ ist kleinster Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

~~Es~~ Wir zeigen: $\forall z < \sup K$: z ist kein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Sei $z < \sup K$

Nach Def. "Supremum" gibt es $x \in K$ mit $x > z$

Nach Def. von K gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > m : a_n \geq x$

Also gilt: $\forall n > m : a_n \geq x > z$, ~~d.h.~~

Also: $\forall n > m : a_n \notin U_{x-z}(z)$, weil $|a_n - z| = (a_n - x) + (x - z) \geq x - z$

Es folgt: $U_{x-z}(z) \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ enthält nur endlich viele Folgenglieder ~~Elemente von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$~~

d.h. z ist kein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 5

5.6. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge in $B \subseteq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, die keinen Häufungspunkt in B ~~besitzt~~ besitzt.

Also gibt es für alle $x\in B$ eine offene Umgebung U_x von x, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, d.h. $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \in U_x\}$ ist endlich.

Dann ist $(U_x)_{x\in B}$ eine offene Überdeckung von B, denn

- U_x ist offen für alle $x\in B$
- $\bigcup_{x\in B} U_x \supseteq \bigcup_{x\in B}\{x\} = B$ (denn $\{x\}\subseteq U_x$).

Sei $E\subseteq B$ endlich.

Dann ist $(U_x)_{x\in E}$ keine offene Überdeckung von B, denn:

$\bigcup_{x\in E}\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in U_x\}$ ist endlich (weil E und $\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\in U_x\}$ endlich)

Also: $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \in \bigcup_{x\in E} U_x\} = \bigcup_{x\in E}\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\in U_x\}$ ist endlich

$\Rightarrow$ Also gibt es $n_0\in\mathbb{N}$ mit $a_{n_0}\notin \bigcup_{x\in E} U_x$

Wegen $a_{n_0}\in B$ ist $\bigcup_{x\in E} U_x \not\supseteq B$, d.h. $(U_x)_{x\in E}$ ist keine Überdeckung von B.

Wir haben also eine offene Überdeckung von B gefunden (nämlich $(U_x)_{x\in B}$), die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Also ist B nicht kompakt.

<u>Bem:</u> Der Beweis ~~gilt~~ funktioniert offenbar für jedes $B\subseteq M$, wenn (M,τ) ein topologischer Raum ist, d.h. es gilt:

Sei (M,τ) topologischer Raum, und $B\subseteq M$. Dann gilt:

B kompakt $\Rightarrow$ B folgenkompakt

<u>Achtung:</u> Die Umkehrung "B folgenkompakt $\Rightarrow$ B kompakt" ist für allgemeine topologische Räume falsch.