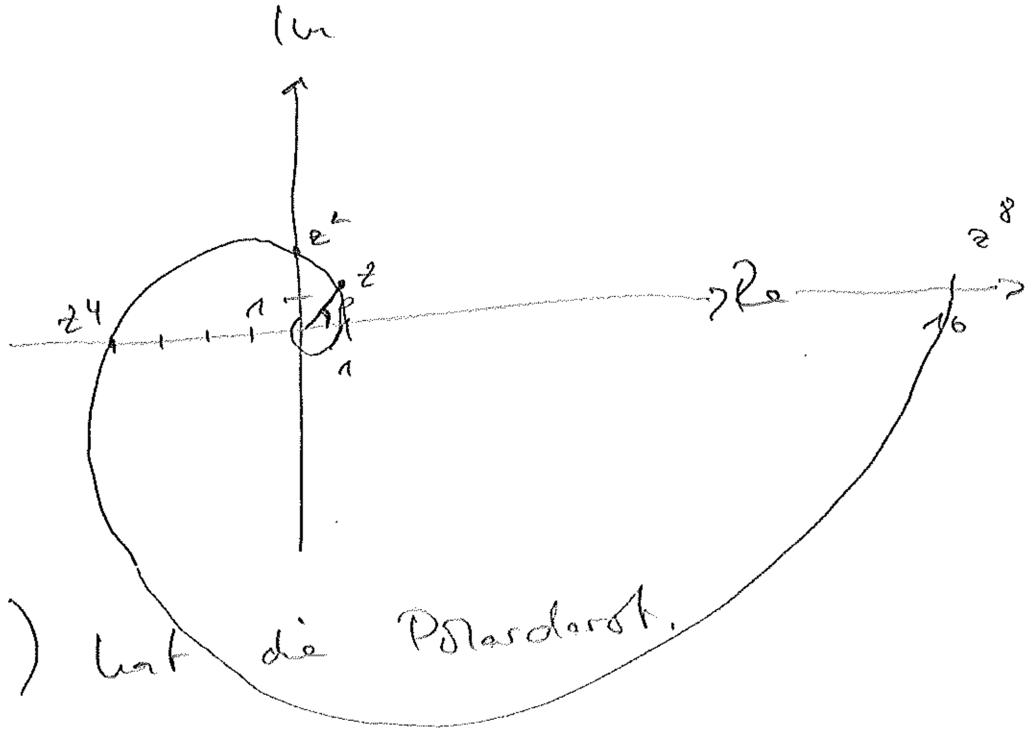
Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 4

4.1.a. $(1+i)^2 = 2i$

$(\quad)^4 = -4$

$(\quad)^8 = 16$

b.



(1+i) hat die Polardarst.

$$\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) = (\varphi, r)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)^8 = \left(8\cdot\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}^{\,8}\right) = (2\pi, 16) = (0, 16)$$

In der Skizze eingezeichnet ist die logarithmische Spirale z^x $(x \in \mathbb{R})$.

4.3. Gesucht: $p, q \in \mathbb{R}$ sodass

$$(p+iq)^2 = p^2 - q^2 + i2pq = a + ib.$$

D.h.
$$p^2 - q^2 = a$$
$$\wedge \quad 2pq = b$$

1. Fall: $p = 0 \Leftrightarrow (p+iq)^2 \in \mathbb{R}$, also falls $a+ib \in \mathbb{R}$. Und da kennen wir die Wurzeln.

2. Fall: $p \neq 0$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{b}{2p} \qquad (**)$$

$$p^2 - \left(\frac{b}{2p}\right)^2 = a$$

$$p^4 - ap^2 + \frac{b^2}{4} = 0$$

$$p^2 \in \left\{ \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \right\} \qquad (*)$$

$$p \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right\}$$

Weil das $-$ in $(*)$ zu einem negativen Radikanden führen würde, und wir wollen $p \in \mathbb{R}$.

Genauso:

$$q \in \left\{ \pm \sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \right\},$$

wobei das Vorzeichen zu wählen ist wie für p, falls $b>0$, ansonsten umgekehrt. (Dies folgt aus $(**)$).

4.2. Sei $z = a+ib$. Es gilt $a^2+b^2=1$.

$$f(a+ib) = \frac{a+ib-1}{a+ib+1} = \frac{(a+ib-1)(a+1-ib)}{(a+ib+1)(a+1-ib)}$$

$$= \frac{a^2-(ib-1)^2}{(a+1)^2+b^2} = \frac{a^2+b^2+2ib-1}{(a+1)^2+b^2}$$

$$= i\frac{2b}{(a+1)^2+b^2}$$

Dies ist rein imaginär also Element der imaginären Achse $i\mathbb{R}$. Sei nun $c \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$ic = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z = \frac{-ic-1}{ic-1} = \frac{(1+ic)^2}{c^2+1}$$

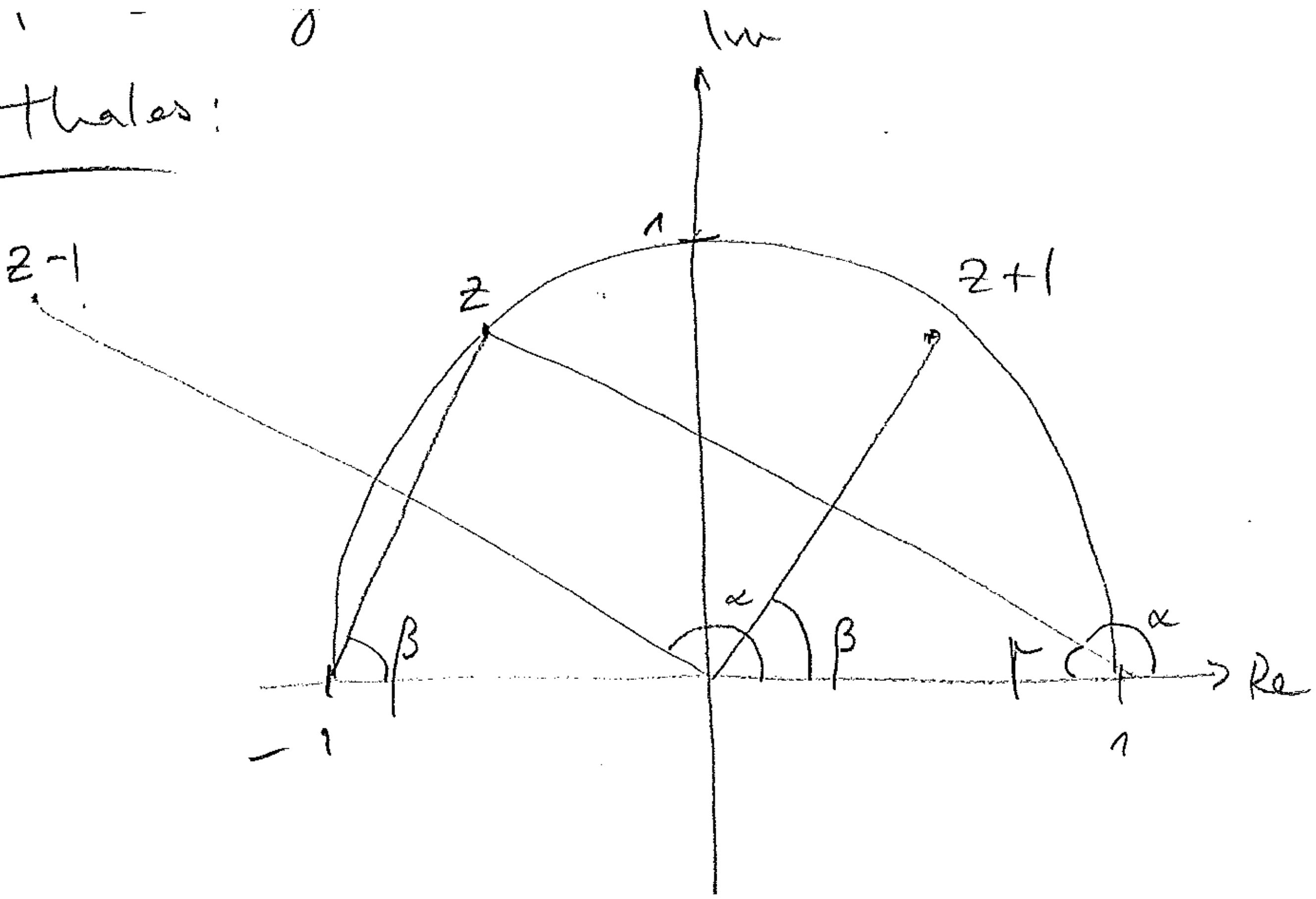
Es folgt z.B., dass diese

$z \in K$:

$$\left|\frac{(1+ic)^2}{1+c^2}\right| = \frac{1^2+c^2}{1+c^2} = 1$$

und $z \neq -1 \quad \forall c$.

<u>Thales:</u>



Die Aufgabe zeigt:

$\frac{z-1}{z+1}$ hat in Polarkoord. einen

Winkel von $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$

(d.h. $90°$ oder $270°$).

Weil sich die Winkel beim Dividieren subtrahieren, folgt

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \text{ oder } = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Weil die Winkelsumme im Dreieck $= \pi$ ist, haben wir bei z einen rechten W.

Das „nur dann", das in der Aussage steckt, folgt mit Ähnlichkeitsargumenten.

U.4. a. z.z. „$\Rightarrow$":

$$V \text{ offen} \Rightarrow V \cap \partial V = \emptyset.$$

Sei $v \in V$ beliebig. Nach Defi. ist

$$\partial V = \{x \mid \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap V \neq \emptyset \wedge U_\varepsilon(x) \setminus V \neq \emptyset\}$$

Weil V offen ist, gibt es ein $\delta > 0$:

$$U_\delta(v) \setminus V = \emptyset.$$

Daher ist $v \notin \partial V$, also

$V \cap \partial V = \emptyset$.

„$\Leftarrow$": $V \cap \partial V = \emptyset \Rightarrow V$ offen.

Hier gibt $\nexists v \in V : v \in \partial V$.

d.h. $\forall v \in V \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{U_\varepsilon(v) \setminus V = \emptyset}_{U_\varepsilon(v) \subset V}$.

Also ist V offen.

b. Zu zeigen:

$$V \text{ abg.} \Leftrightarrow \partial V \subseteq V$$

„⟹" $V = \overline{V}$. Sei $v \in \partial V$,

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(v) \cap V \neq \emptyset$

$\wedge\ U_\varepsilon(v) \setminus V \neq \emptyset$

$\Rightarrow v \in \overline{V} = V$. Also $\partial V \subseteq V$.

„⟸" Sei $v \in \overline{V} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(v) \cap V \neq \emptyset$.

Angenommen $v \notin V$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(v) \setminus V \neq \emptyset$

$\Rightarrow v \in \partial V$ im Wid zu

$\partial V \subseteq V$.

Also war $v \notin V$ falsch und

es gilt $v \in V$.

$\Rightarrow V \supseteq \overline{V}$. $\overline{V} \supseteq V$ ist klar.

c. Behauptung: $\partial V \supseteq \partial(\partial V)$

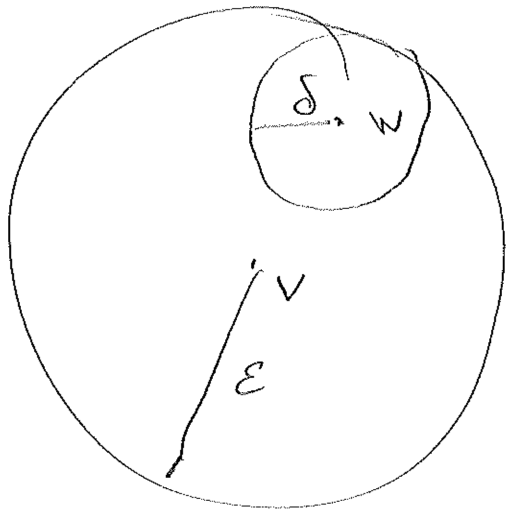
Beweis: Sei $v \in \partial(\partial V)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(v) \cap \partial V \neq \emptyset$ (*)

$\wedge\ U_\varepsilon(v) \setminus \partial V \neq \emptyset$

(*) $\Rightarrow \exists w \in \partial V: w \in U_\varepsilon(v)$.

Setze $\delta := \varepsilon - \underbrace{|v - w|}_{< \varepsilon} > 0$



$$\Rightarrow \quad U_\delta(w) \subset U_\varepsilon(v)$$

Weil $w \in \partial V$ gilt

$$U_\delta(w) \cap V \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow U_\varepsilon(v) \cap V \neq \emptyset$$

Genauso

$$U_\varepsilon(v) \setminus V \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad v \in \partial V.$$

Mit 6. folgt die Beh.

4.5. Wir verwenden die Dezimaldarstellung der reellen Zahlen aus Aufgabe 3.5.b: Dort ist gezeigt für $x \in [0,1[\subset \mathbb{R}$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-k} d_k$$

mit den dort definierten d_k gilt:

$$x_n \leq x < x_n + 10^{-n}.$$

Sei nun $y \in \mathbb{R}$ beliebig.

z.z. $\forall \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(y) \cap D \neq \emptyset$.

Setze oben

$$x := y - \lfloor y \rfloor$$

und n so groß, dass $10^{-n} < \varepsilon$.

Dann ist $x_n + \lfloor y \rfloor \in D$ und

$$x_n + \lfloor y \rfloor \leq y < x_n + \lfloor y \rfloor + 10^{-n}$$

Also $|(x_n + \lfloor y \rfloor) - y| < 10^{-n} < \varepsilon$.

4.6. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Schritt. Es gilt:

$$nx - \lfloor nx \rfloor = mx - \lfloor mx \rfloor$$

$$\Rightarrow n = m$$

Bew. $(n-m)x = \lfloor mx \rfloor - \lfloor nx \rfloor \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n - m = 0$, sonst wäre $x \in \mathbb{Q}$.

2. Schritt. Sei $n > 0$ fest. Setze

$$M_n := \{ mx - \lfloor mx \rfloor \mid 0 \leq m \leq n \}$$

und

$$Min_n := \min \{ |a-b| \mid a, b \in M_n, a < b \}$$

(Dies ist also der minimale Abstand, den 2 Punkte der Menge M_n annehmen.)

$$Max_n := \max \{ |a-b| \mid a, b \in M_n \wedge a < b \wedge \nexists c \in M_n : a < c < b \}$$

(Der maximale Abstand, den 2 benachbarte Punkte der Menge M_n annehmen.)

Behauptung: $\exists\, \ell$:

$$\mathrm{Min}_n \geq \mathrm{Max}_\ell.$$

Beweis: Seien $a, b \in M_n$ so, dass $|a-b| = \mathrm{Min}_n$. (...)

$a = px - \lfloor px \rfloor$; $b = qx - \lfloor qx \rfloor$.

1. Fall $p < q$. Dann gilt

$$(q-p)x - \lfloor (q-p)x \rfloor = b-a.$$

Weil $q-p > 0$ ist also $b-a \in M_n$ und für ℓ so groß, dass $\ell(b-a) > 1$ folgt

$$\mathrm{Max}_\ell \leq \mathrm{Min}_n.$$

2. Fall $p > q$. Dann ist

$$(p-q)x - \lfloor (p-q)x \rfloor = 1-(b-a).$$

Auch hier gilt für ℓ groß genug

$$\mathrm{Max}_\ell \leq \mathrm{Min}_n.$$

3. Schritt: Wir haben also gesehen:
„Wenn irgendwo ein kleiner Abstand in der Menge M_n vorkommt, gibt es ein ℓ, so dass alle Abstände in der Menge M_ℓ höchstens so groß sind."

Der Rest ist eine Induktion, deren Schritt ich lediglich andeuten möchte:

Betrachte M_ℓ, so dass Max_ℓ eine gewisse Größe habe.
Und betrachte nun

$$c := (\ell+1)x - \lfloor(\ell+1)x\rfloor .$$

Dieses c fällt zwischen zwei benachbarte $a, b \in M_\ell$ (beachte den 1. Schritt).

$$\Rightarrow \mathrm{Min}_{\ell+1} \leq \frac{1}{2}\mathrm{Max}_\ell$$

Und für ℓ' groß genug gilt nach dem 2. Schritt wieder

$\max_{l'} \leq \min_{l+1}$

Damit geht die Folge

$$(\max_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$

und daraus folgt die Beh.