# Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 3

3.1. a) $b < c$ heißt nach Def.:

$c - b > 0$.

$\Rightarrow (c+a) - (b+a) = c - b > 0$

d.h. $b + a < c + a$.

b) $c - b > 0 \wedge a > 0$

$\Rightarrow ac - ab = a(c-b) > 0$

d.h. $ab < ac$

c) Wir ~~zeigen~~ zeigen zunächst: Jede Quadratzahl ist positiv:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x = y^2$

für ein $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Fall: $y > 0 \Rightarrow x = y^2 > 0$

2. Fall $y < 0$, d.h. $-y > 0$

$\Rightarrow x = (-y)^2 > 0$

Also ist insbesd. $1 > 0$.

Nun zeigen wir:

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$$

Angenommen, $\frac{1}{x} < 0$, d.h. $-\frac{1}{x} > 0$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot x = -1 > 0$$

und damit $-1 + 1 = 0 > 0$

Dies ist ein Widerspruch,

also war $\frac{1}{x} < 0$ falsch.

Zuletzt:

$a, b, c, (c-b) > 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{b}, \frac{1}{c} > 0$ und

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = (c-b) \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{b} > 0,$$ also

$$a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) > 0,$$ d.h.

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$$

3.2. a) z.z. $\sup(A) + \sup(B) =: S$
ist die kleinste obere Schranke
von der Menge $A+B$.
1. Schritt: $S$ ist obere Schranke (o.S.)
von $A+B$:
Sei $x \in A+B$ beliebig. Dann
$\exists\, a \in A \wedge \exists\, b \in B: x = a+b$
Weil $\sup A$ o.S. von $A$ ist,
$\Rightarrow a \leq \sup A$. Genauso
$\Rightarrow b \leq \sup B$.
$\Rightarrow x = a+b \leq S$.
2. Schritt: $S$ ist kleinste o.S. von
$A+B$: z.z. ist, dass
$\forall \varepsilon > 0$: $S - \varepsilon$ ist keine
o.S. von $A+B$.
Bew.: Betrachte $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$.
Dies ist keine o.S. von $A$, weil
$\sup(A)$ die kleinste war.
$\Rightarrow \exists\, a \in A: a > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$

Genauso: $\exists\, b \in B:\ \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < b$.

$\Rightarrow\ x := a + b > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} + \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$

$= S - \varepsilon$

Weil $x \in A+B$, ist $S-\varepsilon$ keine o.S. von $A+B$, also $S$ die kleinste.

b) z.z. $\sup A \sup A$ ist kl. o.S. von $AB$. 1. Schritt: o.S.:
Sei $x \in AB \Rightarrow \exists\, a \in A \wedge \exists\, b \in B$: $x = ab$. Weil $a \leq \sup A$ und $b \leq \sup B \Rightarrow x \leq \sup A \sup B$.
2. Schritt: „kleinste". Sei $\varepsilon > 0$.
Wir zeigen: $\sup A \cdot \sup B - \varepsilon$ ist keine o.S. von $AB$. Wähle dazu ein $a \in A$ mit $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2 \sup B}$ und $b \in B$ mit $b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2 \sup A}$.

$\Rightarrow\ ab > \sup A \cdot \sup B - \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\varepsilon^2}{4 \sup A \sup B}$

$> \sup A \sup B - \varepsilon$.

3.13. a. Zunächst machen wir uns klar, dass diese Ungleichung stimmt:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Es gilt also

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{1^2} & + & \frac{1}{2^2} & + & \frac{1}{3^2} & + & \frac{1}{4^2} & + & \dots \\ \parallel & & \wedge & & \wedge & & \wedge & & \\ 1 & + & \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) & + & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) & + & \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) & + & \dots \end{array}$$

In Formeln:

$$\forall m: \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{m} < 2$$

Damit ist 2 obere Schranke von $\{a_m\}$.

b. Mit dem gleichen Argument folgern wir für $2 \leq k \leq m$:

$$\sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k-1}$$

Damit gilt für $a_{10}$ und $m > 10$:

$$a_m = a_{10} + \sum_{k=11}^{m} \frac{1}{k^2} < a_{10} + \frac{1}{10}$$

Also ist $a_{10} + \frac{1}{10}$ obere Schranke von $A$. Weil $\sup A$ die kleinste ist, folgt

$$a_{10} < \sup A \leq a_{10} + \frac{1}{10}.$$

3.4. Zunächst zeigen wir:

$$\{(\tfrac{1}{x})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist nach oben unbeschränkt:

$x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1$. Setze $\frac{1}{x} - 1 =: \delta > 0$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta$$

nach Bernoulli.

Nun betrachten wir wieder

$$\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$$\Rightarrow \quad x^n \leq \frac{1}{1+n\delta}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass für großes $n$ gilt: $x^n < \varepsilon$:

Nach dem Archimedischen Ax.

$\exists\, n \in \mathbb{N}: \quad n \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\delta} \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad x^n \leq \frac{1}{1+n\delta} \leq \frac{1}{1+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\delta}\cdot\delta} = \varepsilon.$$

3.5. a. Wir ~~zeigen~~ $y_n \in [0,1[$:

$y_0 = x \in [0,1[$ nach Vor.

$y_{n+1} = by_n - \lfloor by_n \rfloor$

Nach Definition folgt

$\lfloor by_n \rfloor \le by_n < \lfloor by_n \rfloor + 1$

$\Rightarrow 0 \le by_n - \lfloor by_n \rfloor < 1$.

Damit ist $by_n \in [0, 10[$

und $\lfloor by_n \rfloor \in \{0, \dots, 9\}$.

b. Wir zeigen: $\forall n$:

$x = x_n + b^{-n} y_n$.

Induktion nach $n$. $n = 1$

$x_1 + b^{-1} y_1 = \sum_{k=1}^{1} d_k b^{-k} + b^{-1} y_1$

$= d_1 b^{-1} + y_1 b^{-1} = y_0 = x$

Schritt: $n \to n+1$.

$x_{n+1} + b^{-(n+1)} y_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} d_k b^{-k} + b^{-(n+1)} y_{n+1}$

$= d_{n+1} b^{-(n+1)} + x_n + b^{-(n+1)} y_{n+1}$

$$= x_n + b^{-n}\underbrace{\left(d_{n+1}b^{-1} + y_{n+1}b^{-1}\right)}_{y_n}$$

$$= x_n + b^{-n} y_n \overset{<}{=} x.$$

Weil nach a) $y_n \in [0,1[$, folgt die Behauptung.

c. z.z.: $x$ ist kl. o.S. von $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

„o.S.": Dies folgt aus

$\forall n: x_n \leq x$.

„kleinste": Betrachte $x - \varepsilon$.

Aus der vorherigen Aufgabe folgt $\inf\{(\frac{1}{b})^n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

D.h., $\exists n: b^{-n} < \varepsilon$.

Mit b. $\Rightarrow x_n > x - b^{-n} > x - \varepsilon$.

Also ist $x - \varepsilon$ keine o.S. mehr.

d. Induktion nach $n$.

Anfang $n=1$. Es gilt

$$d_1' b^{-1} \le x \le (d_1'+1) b^{-1}$$

d.h.

$$d_1' \le bx < d_1'+1$$

Dies legt $d_1'$ eindeutig fest, wenn es ganzzahlig sein soll.

(Damit ist $d_1' = d_1$.)

Schritt. $n \to n+1$.

$$x_{n+1} \le x < x_{n+1} + b^{-(n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} d_k' b^{-k} \le x < \sum_{k=1}^{n+1} d_k' b^{-k} + b^{(n+1)}$$

$$d_{n+1}' b^{-(n+1)} \le \underbrace{x - \sum_{k=1}^{n} d_k' b^{-k}} < (d_{n+1}'+1) b^{-(n+1)}$$

Dieses ist n. Vor. – weil die $d_k' = d_k$ eindeutig sind – gleich $x - x_n$.

$$\Rightarrow \quad d'_{n+1} b^{-(n+1)} \leq b^{-n} y_n < (d'_{n+1}+1) b^{-(n+1)}$$

(nach b.)

$$\Rightarrow \quad d'_{n+1} \leq b y_n < d'_{n+1}+1 ,$$

Und dies legt wieder $d'_{n+1}$ fest, wenn es ganzzahlig sein soll.

$$\Rightarrow \quad d'_{n+1} = d_{n+1} .$$

3.6. a. Weil $\left(\frac{a}{2}\right)^2 < a$

$\Rightarrow \frac{a}{2} \in Q(a) \neq \emptyset$.

Weil $(\max(a,1))^2 \geq a$

$\Rightarrow \max(a,1)$ ist obere Schranke von $Q(a)$.

b. Es ist sogar

$$\left(\min\left(a, \tfrac{1}{2}\right)\right)^2 < a$$

$\Rightarrow \min\left(a, \frac{1}{2}\right) \in Q(a)$

$\Rightarrow \sup(Q(a)) > 0$.

---

Um zu zeigen, dass $(\sup(Q(a)))^2 = a$, gehen wir in 2 Schritte vor:

1. Es gibt $(\sup(Q(a)))^2 \neq a$. Bew.

Ang. $(\sup(Q(a)))^2 = a+\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$.

Dann gibt es ein $x \in Q$ mit

$$\sup Q(a) - \frac{\varepsilon}{2\sup Q(a)} < x < \sup Q(a)$$

Für dieses $x$ gilt

$$x^2 > (\sup Q(a))^2 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4(\sup Q(a))^2}$$

$$= a + \varepsilon - \varepsilon + \text{—''—}$$

$$> a$$

Also $x \notin Q(a)$, und das steht im Wid. zu $x < \sup Q(a)$.

2. Es gilt $(\sup Q(a))^2 \nless a$. Bew.

Ang $(\sup Q(a))^2 = a - \varepsilon$ mit $1 > \varepsilon > 0$.

Dann gibt es ein $x \in \mathbb{Q}$ mit

$$\sup Q(a) < x < \sup Q(a) + \frac{\varepsilon}{4 \max(\sup Q_a, 1)}$$

$$\Rightarrow x^2 < \underbrace{(\sup Q(a))^2}_{a-\varepsilon} + \underbrace{2 \frac{\varepsilon}{4}}_{= \varepsilon/2} + \underbrace{\frac{\varepsilon^2}{16 \max^2(\sup Q_a, 1)}}_{< \varepsilon/2}$$

$$< a$$

$\Rightarrow x \in Q(a)$ im Wid. zu $\sup Q(a) < x$.

d. Auch hier verwenden wir, dass

$$\underbrace{\sup(Q(a)\cdot Q(b))}_{=} = \underbrace{\sup(Q(a))}_{=\sqrt{a}}\underbrace{\sup(Q(b))}_{=\sqrt{b}}$$

Damit ist noch z.z.

$$\sqrt{ab} = \sup(Q(ab))$$
$$= \sup(Q(a)\,Q(b)).$$

Das folgt direkt aus der Definition.

c. Folgt aus d. und b.:

$$\sqrt{a^2} \overset{d}{=} \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 \overset{b}{=} a$$