Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 2

2.1. Induktionsanfang. $m=0$.

$$\sum_{n=0}^{0}(a+nb) = a+0\cdot b = a = $$
$$= (0+1)\left(a+0\cdot\frac{b}{2}\right)$$

Induktionsschritt. $m \to m+1$.

(V) Wir verwenden die Ind.voraussetzung:

$$\sum_{n=0}^{m}(a+nb) = (m+1)\left(a+m\frac{b}{2}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{m+1}(a+nb) = a+(m+1)b+\sum_{n=0}^{m}(a+nb)$$
$$\overset{(V)}{=} a+(m+1)b+(m+1)\left(a+m\frac{b}{2}\right)$$
$$= (m+2)\left(a+(m+1)\frac{b}{2}\right)$$

2.2 Ind.anf. $m=1$.

$$\sum_{n=1}^{1}\frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} = 2-\frac{2+1}{2}$$

Schritt : $m \to m+1$.

(V) Vorauss.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2+m}{2^m}$$

$$\sum_{n=1}^{m+1} \frac{n}{2^n} \overset{(V)}{=} \frac{m+1}{2^{m+1}} + 2 - \frac{2+m}{2^m}$$

$$= 2 - \frac{-(m+1) + 2(2+m)}{2^{m+1}}$$

$$= 2 - \frac{m+3}{2^{m+1}}$$

2.3. a)

$$p_0(k) = k$$

$$p_1(k) = \frac{1}{2}\left(k^2 - \sum_{j=0}^{0} \binom{2}{j} p_j(k)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(k^2 - 1 \cdot p_0(k)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right)$$

$$p_2(k) = \frac{1}{3}\left(k^3 - \sum_{j=0}^{1} \binom{3}{j} p_j(k)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(k^3 - 1 \cdot p_0(k) - 3p_1(k)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(k^3 - k - 3\cdot\frac{1}{2}\left(k^2 - k\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2k^3 - 3k^2 + \cancel{2}k\right)$$

$$p_3(k) = \frac{1}{4}\left(k^4 - \sum_{j=0}^{2} \binom{4}{j} p_j(k)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(k^4 - k - 4\cdot\frac{1}{2}\left(k^2 - k\right) - 6\frac{1}{6}\left(2k^3 - 3k^2 + k\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(k^4 - 2k^3 + k^2\right) = \frac{1}{4}k^2(k-1)^2$$

b) Anfang $k = 1$.

$$\sum_{l=0}^{0} l^2 = 0 = \frac{1}{6}\left(2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 0\right)$$

Schritt. $k \to k+1$.

$$(V) \quad p_2(k) = \sum_{l=0}^{k-1} l^2$$

$$\sum_{l=0}^{k} l^2 \overset{(V)}{=} k^2 + \frac{1}{6}\left(2k^3 - 3k^2 + k\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2k^3 + 3k^2 + k\right)$$

$$= \frac{1}{6}\Big(2\left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right) - 3\left(k^2 + 2k + 1\right) + (k+1)\Big)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1)\right)$$

*) (B) Nach der Bin. Formel gilt:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \ell^j = (\ell + 1)^{n+1}$$

Induktion nach n.

Anfang: $n = 0$.

$$p_0(k) = k = \sum_{\ell=0}^{k-1} \ell^0$$

Schritt. $n \to n+1$.

$$p_{n+1}(k) = \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+2}{j} p_j(k)\right)$$

$$\overset{(V)}{=} \frac{1}{2+n}\left(k^{n+2} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+2}{j} \sum_{\ell=0}^{k-1} \ell^j\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+2}{j} l^j\right)$$

(Bei diesem Vertauschen der Summen muss darauf geachtet werden, dass die Summe, die nach links gezogen wird $\left(\sum_{l=0}^{k-1}\right)$ unabhängig von j (= Variable der anderen Summe) ist. Was hier eigentlich passiert, ist das allgemeine Distributivgesetz.)

$$(= \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{l=0}^{k-1}\left(-1 \cdot l^{n+2} - (n+2) \cdot l^{n+1} + \sum_{j=0}^{n+2} \binom{n+2}{j} l^j\right)\right)$$

$$\overset{(B)}{=} \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{l=0}^{k-1}\left(-l^{n+2} - (n+2) l^{n+1} + (l+1)^{n+2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} + \sum_{l=0}^{k-1} (+l^{n+2}) + \sum_{l=0}^{k-1} (n+2) l^{n+1} - \sum_{l=1}^{k} l^{n+2}\right)$$

2.4. a Zu zeigen, dass $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$:

$$n + m = m + n$$

geht in einer doppelten Induktion:
Man zeigt in einer (äußeren) Induktion über m, dass $\forall n$:

$$n + m = m + n,$$

immer gegeben, dass $\forall m' < m$ $\forall n$:

$$n + m' = m' + n.$$

Dabei ist der Induktionsschritt selbst wieder eine (innere) Induktion über n.
Um dies zu verdeutlichen, zeigen wir einige Induktionsschritte einzeln:

α) $\forall n : n + 0 = 0 + n$

Bew.: Anfang: $n = 0$.

$$0 + 0 = 0 + 0$$

Schritt. $n \to N(n)$.

$$N(n)+0 \overset{Def}{=} N(n) \overset{Def}{=} N(n+0)$$

$$\overset{Vor}{=} N(0+n) \overset{Def}{=} 0+N(n)$$

β) $\forall n: \; n+1 = 1+n$

Anfang. $n=0$.

$$0+1 \overset{a)}{=} 1+0$$

Schritt. $n \to N(n)$.

$$N(n)+1 \overset{Def}{=} N(n)+N(0) \overset{Def}{=}$$

$$N(N(n)+0) \overset{a)}{=} N(0+N(n))$$

$$\overset{Def}{=} N(N(0+n)) \overset{a)}{=} N(N(n+0))$$

$$\overset{Def}{=} N(n+N(0)) \overset{Def}{=} N(n+1)$$

$$\overset{Vor.}{=} N(1+n) \overset{Def}{=} 1+N(n)$$

Wir haben sowohl a) als auch die Ind. Vor. benötigt.

γ) Genauso kann man unter Verwendung von b) zeigen, dass

$\forall n: \quad n+2 = 2+n.$

u.s.w.

Die hier begonnene äußere Induktion richtig aufgeschrieben:

Behauptung $\forall n, m \in \mathbb{N}_0: \; n+m = m+n$

Bew. Induktion nach m.

Anfang. $m=0$. Das ist a)

Schritt. $m \to N(m)$

Vorauss: $\forall\, m' \leq m \;\forall n:$ (V_1)

$n+m' = m'+n.$

Schritt: Ind nach n.

Anfang. $n=0$

$0+N(m) = N(m)+0$ gilt nach a)

Schritt. $n \to N(n)$.

Vorauss.: $n+N(m) = N(m)+n \quad (V_2)$

$$N(n)+N(m) = N(N(n)+m) \overset{V_1}{=} N(m+N(n))$$

$$= N(N(m+n)) \overset{V_1}{=} N(N(n+m))$$

$$= N(n+N(m)) \overset{V_2}{=} N(N(m)+n)$$

$$= N(m)+N(n)$$

Fertig ☺

2.4. b Assoziativität:

~~Wir verwenden a~~.

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

Beweis, dass dann $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$(a+b)+n = a+(b+n)$$

Induktion nach n.

Anfang: $n=0$.

$$(a+b)+0 \overset{\text{Def}}{=} a+b$$

$$\overset{\text{Def}}{=} a+(b+0)$$

Schritt. $n \to N(n)$. Sei

$$(a+b)+n = a+(b+n)$$

bereits gezeigt. Dann gilt:

$$(a+b)+N(n) \overset{\text{Def}}{=} N((a+b)+n)$$

$$\overset{V}{=} N(a+(b+n)) \overset{D}{=} a+N(b+n)$$

$$\overset{D}{=} a+(b+N(n))$$

2.5 Wir beobachten:

$$\left(\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\right)^2 = \frac{1}{4}(1 \pm 2\sqrt{5} + 5)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Ind. nach n.

Anfang. $n \in \{0,1\}$.

$$f_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega_+^0 - \omega_-^0)$$

$$f_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5})$$

Schritt: $n \to n+1$ $(n \geq 1)$

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n \overset{\checkmark}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega_+^{n-1} - \omega_-^{n-1} + \omega_+^n - \omega_-^n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega_+^{n-1}(1 + \omega_+) - \omega_-^{n-1}(1 + \omega_-)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega_+^{n-1}\omega_+^2 - \omega_-^{n-1}\omega_-^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega_+^{n+1} - \omega_-^{n+1}\right)$$

2.6 Angenommen, M besitzt kein minimales Element.

Beh.: $\forall m \in \mathbb{N} : m \notin M$.

Bew. Ind nach m.

Anfang: $m = 1 \Rightarrow m \notin M$

(denn: wäre $1 \in M$, wäre es sicher minimal, weil es ja schon die kleinste in $\mathbb{N}$ ist.)

Schritt. $m \to m+1$.

Es gilt $m+1 \notin M$

(denn! wäre $m+1 \in M$ wäre es das kleinste, weil andere Ind. vor. sagt $\forall m' \leq m$: $m' \notin M$.)

Damit ist ganz $\mathbb{N}$ nicht in M enthalten (ich meine: $\forall m \in \mathbb{N} : m \notin M$), also $M = \emptyset$.