Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 1

1.1. $N: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ Nachfolgerfunktion

$$1 := N(0), \quad 2 := N(1), \quad 3 := N(2), \quad 4 := N(3) \qquad (A)$$

Addition $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$n + 0 := n \qquad (B)$$
$$n + N(m) := N(n+m) \qquad (C)$$

Multiplikation $\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$n \cdot 0 := 0 \qquad (D)$$
$$n \cdot N(m) := n \cdot m + n \qquad (E)$$

a) zu zeigen: $1 + 1 = 2$

Beweis

$$1 + 1 \overset{(A)}{=} 1 + N(0) \overset{(C)}{=} N(1+0) \overset{(B)}{=} N(1) \overset{(A)}{=} 2 \qquad \square$$

~~Nach~~ Wegen der Definition ist es wichtig, die rechte "1" durch $N(0)$ zu ersetzen.

b) zu zeigen: $2 + 2 = 4$

Beweis

$$2 + 2 \overset{(A)}{=} 2 + N(1) \overset{(C)}{=} N(2+1) \overset{(A)}{=} N(2 + N(0)) \overset{(C)}{=} N(N(2+0))$$
$$\overset{(B)}{=} N(N(2)) \overset{(A)}{=} N(3) \overset{(A)}{=} \cancel{N(4)}\ 4$$

$\square$

c) zu zeigen: $2 \cdot 2 = 4$

Beweis

$$2 \cdot 2 \overset{(A)}{=} 2 \cdot N(1) \overset{(E)}{=} 2 \cdot 1 + 2 \overset{(A)}{=} [2 \cdot N(0)] + 2 =$$
$$\overset{(E)}{=} [2 \cdot 0 + 2] + 2 \overset{(D)}{=} [0 + 2] + 2 \overset{(A)}{=} [0 + N(1)] + 2 =$$
$$\overset{(C)}{=} [N(0+1)] + 2 \overset{(A)}{=} N(0 + N(0)) + 2 \overset{(C)}{=} N(N(0+0)) + 2 =$$
$$\overset{(B)}{=} N(N(0)) + 2 \overset{(A)}{=} N(1) + 2 \overset{(A)}{=} 2 + 2 \underset{\text{Teilaufgabe b)}}{=} 4$$

$\square$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 1

1.2. $\boxed{*_1}$ Gegeben: — (nichts)

zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x > 0 \ \forall y > x : \left(y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon \right)$

$\boxed{*_2}$ geg: $\varepsilon > 0$

z.z.: $\exists \delta > 0 \ \forall x > 0 \ \forall y > x : \left(y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon \right)$

$\boxed{*_3}$ geg: $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon^2$

z.z.: $\forall x > 0 \ \forall y > x : \left(y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon \right)$

$\boxed{*_4}$ geg: $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon^2$, $x > 0$

z.z.: $\forall y > x : \left(y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon \right)$

$\boxed{*_5}$ geg: $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon^2$, $x > 0$, $y > x$

z.z.: $y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$

$\boxed{*_6}$ geg: $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon^2$, $x > 0$, $y > x$, $y - x < \delta$

z.z.: $\sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$

$\boxed{*_7}$ geg: nichts relevantes da Beweis zu Ende

z.z.: — (nichts)

(1) geg. Aussagen: $x > 0$

allgemeine Aussagen: $\cancel{a > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > 0}$,

- $\forall a \in \mathbb{R} : a > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : b > 0 \Rightarrow a + b \geqslant a$

(2) geg. A.: $x > 0$, $y > x$

allg. A.:
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : b \geq 0 \Rightarrow a \geqslant a - b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 1

(3) geg A: $x>0,\ y>x$

allg. A.:
- $\forall a,b\in\mathbb{R}:\ (a-b)(a+b)=a^2+b^2$
- $\forall a\geq 0:\ (\sqrt{a})^2=a$
- $\forall a,b\in\mathbb{R}:\ a>b\ \wedge\ b>0\ \Rightarrow\ a>0$ [für $y>0$]

(4) geg. A.: $x>0,\ y>x,\ \sqrt{y}+\sqrt{x}\geq\sqrt{y-x}$

allg. A.:
- $\forall a,b,c>0:\ b\geq c\ \Rightarrow\ \frac{a}{b}\leq\frac{a}{c}$
- $\forall a,b\in\mathbb{R}:\ a>b\ \Rightarrow\ a-b>0$
- $\forall a,b\in\mathbb{R}:\ a>b\ \wedge\ b>0\ \Rightarrow\ a>0$ [für $y>0$]
- $\forall a\in\mathbb{R}:\ a>0\ \Rightarrow\ \sqrt{a}>0$ [für $\sqrt{x},\sqrt{y}>0$]

(5) geg. A.: $y-x<\delta,\ y>x$

allg. A.:
- $\forall a,b\in\mathbb{R}:\ a>b\ \Rightarrow\ b-a>0$
- ~~$\forall a,b>0$~~ $\forall a>0,\ b\in\mathbb{R}$: $a<b\ \Rightarrow\ \sqrt{a}<\sqrt{b}$

(6) geg. A.: —

allg. A.: $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:\ a\leq b<c\ \Rightarrow\ a<c$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 1

1.3. a) z.z. $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$ und B haben gleichen Wahrheitswert

Beweis

Wahrheitstabelle

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$	B
w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f

✓

zugehöriges Beweisschema:

z.z.: Aussage B

Beweis Fallunterscheidung:

1. Fall: Es gilt A

⋮ (Argumente)

Es folgt B

2. Fall: Es gilt A nicht.

⋮ ((andere) Argumente)

Es folgt B.

Also ist B gezeigt.

b) z.z.: $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C) \Rightarrow B \vee C$

Beweis: Wahrheitstabelle

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)$	$B \vee C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C) \Rightarrow B \vee C$
w	w	w	w	f	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	w	f	f	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	f	f	f	w

✓

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 1

zugehöriges Beweisschema:

z.z.: $B \vee C$

Beweis Fallunterscheidung

1. Fall: Es gilt A

⋮

Es folgt B

2. Fall: Es gilt A nicht.

⋮

Es folgt C

Also ist $B \vee C$ gezeigt.

c) z.z: $(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$

Beweis: Wahrheitstabelle

A	B	C	$A \vee B$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$	$(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	f	w
f	f	w	f	w	w	f	w
f	f	w	f	w	w	f	w

✓

zugehöriges Beweisschema:

z.z.: C unter Voraussetzung $A \vee B$

Beweis Fallunterscheidung

1. Fall: Es gilt A

⋮

Es folgt C

2. Fall: Es gilt B

⋮

Es folgt C

Also ist C unter Voraussetzung $A \vee B$ gezeigt.

Alternatives Beweisschema

z.z.: C

Beweis

Zeige zunächst $A \vee B$

Dann Fallunterscheidung

1. Fall: Es gilt A ..... Es folgt C

2. Fall: Es gilt B ..... Es folgt C

Also ist C bewiesen.

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 1

1.4. a) $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}) =$

$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0,1\}\},$$
$$\{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0,1\}\},$$
$$\{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, \{0,1\}\}, \{\{1\}, \{0,1\}\},$$
$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\},$$
$$\{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\},$$
$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}\}$$

Übungen zu Analysis 1 — Lösungen zu Blatt 1

1.5. Übersetze $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \{ r \in \mathbb{Q}^+ \mid r > q \} = \mathbb{Q}^+ \qquad (*)$

in prädikatenlogische Formel.

- Für zwei Mengen A, B gilt: $A = B \Leftrightarrow \forall y : (y \in A \Leftrightarrow y \in B)$
  Also ist $(*)$ äquivalent zu

$$\forall y : \Big(y \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \{ r \in \mathbb{Q}^+ \mid r > q \} \Leftrightarrow y \in \mathbb{Q}^+ \Big) \qquad (**)$$

- Es muss noch "$y \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \{ r \in \mathbb{Q}^+ \mid r > q \}$" übersetzt werden. Es gilt:

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \{ r \in \mathbb{Q}^+ \mid r > q \} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Definition}}}{=} \{ x \mid \exists q \in \mathbb{Q}^+ : \underbrace{x \in \{ r \in \mathbb{Q}^+ \mid r > q \}}_{\Leftrightarrow\, x \in \mathbb{Q}^+ \wedge x > q} \}$$

Also gilt:

$$y \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \{ r \in \mathbb{Q}^+ \mid r > q \} \Leftrightarrow \big(\exists q \in \mathbb{Q}^+ : (y \in \mathbb{Q}^+ \wedge y > q) \big)$$

Also ist $(*)$ bzw. $(**)$ äquivalent zu

$$\forall y : \big(y \in \mathbb{Q}^+ \wedge (\exists q \in \mathbb{Q}^+ : y > q) \Leftrightarrow y \in \mathbb{Q}^+ \big) \qquad (***)$$

<u>Beweis</u> von $(***)$:

Sei y gegeben. Zu zeigen: $y \in \mathbb{Q}^+ \wedge (\exists q \in \mathbb{Q}^+ : y > q) \Leftrightarrow y \in \mathbb{Q}^+$

„$\Rightarrow$": Es gelte$^{\oplus}$: $y \in \mathbb{Q}^+ \wedge (\exists q \in \mathbb{Q}^+ : y > q)$
zu zeigen: $y \in \mathbb{Q}^+$
Begr: Das gilt nach Voraussetzung.

„$\Leftarrow$": Es gelte$^{\oplus}$: $y \in \mathbb{Q}^+$
zu zeigen: $y \in \mathbb{Q}^+ \wedge (\exists q \in \mathbb{Q}^+ : y > q)$
<u>Begr</u>: • $y \in \mathbb{Q}^+$ gilt nach Voraussetzung
• Wähle $q = \frac{y}{2}$. Dann gilt: $q \in \mathbb{Q}^+$ und $y > q$ (Eigenschaften von $\mathbb{Q}^+$)
Also wurde auch $(\exists q \in \mathbb{Q}^+ : y > q)$ gezeigt.

Damit ist $(***)$ bewiesen.

> $\oplus$ Bemerkung: „Es gilt" bedeutet etwas anderes als „Es gelte" und wäre an diesen Stellen falsch.