

Übungen zur Analysis 1

14.1 Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass f dann auch auf $[a, b]$ sowie auf $[b, c]$ Riemann-integrierbar ist und dass gilt:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

14.2 Der Graph der Funktion $x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$ wird um die x -Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers zwischen den beiden Nullstellen.

14.3 Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, d.h. f ist auf ganz \mathbb{R} zweimal differenzierbar und die zweite Ableitung f'' ist stetig. Sei $K: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$K(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass

$$\int_{-1}^1 K(x) f''(xh) dx = \frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{h^2}, \quad \forall h \neq 0.$$

(b) Sei $h > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [-h, h]$ gibt mit

$$\int_{-1}^1 K(x) f''(xh) dx = f''(\xi).$$

Beweisen Sie die folgende Formel für die 2. Ableitung:

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{h^2}.$$

14.4 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_a^\infty \frac{dx}{x^3 - x}, \quad a > 1$

(b) $\int_a^\infty \frac{x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 4)^2} dx, \quad a > 2$

(c) $\int_a^\infty \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 - 1)^3} dx, \quad a > 1$

(d) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}$

$$(e) \int_a^\infty \frac{e^x}{e^{6x} - 1} dx, \quad a > 0$$

14.5 Sie stehen auf einer Klippe der Höhe x und blicken über das Meer. Wie weit können Sie sehen (klares Wetter, geradliniges Licht und Kugelgestalt der Erde mit Radius $R > 0$ vorausgesetzt)? Leiten Sie eine Näherungsformel für die Sichtweite s her, die in der Asymptotik $x \ll R$ gilt. Schätzen Sie auch den Fehler Ihrer Näherungsformel nach oben ab. Was ergibt sich für $x = 20$ m und $R = 6378$ km numerisch, inklusive Fehlerabschätzung?

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 4.2.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.