Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 13
21.01.2013

Übungen zur Analysis 1

13.1 Berechnen Sie (in sehr kurzer Zeit):

(a)
$$\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{1+x^2}), \quad x>0$$

(b)
$$\frac{d}{dx}e^{-x^{3/2}}, \quad x>0$$

(c)
$$\frac{d}{dx}\frac{\sin(x^2)}{\cos^2(x)}, \quad -\tfrac{\pi}{2}<x<\tfrac{\pi}{2}$$

13.2 Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-fach differenzierbare Funktion mit $f^{(n+1)}(x) = 0$, $x \in I$. Zeigen Sie, dass f eine Polynomfunktion mit Grad $\leq n$ ist, d.h. dass gilt:

$$\exists (a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\ \forall x \in I:\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

13.3 (a) Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$ mit einer Umgebung U von $x_0 \in \mathbb{R}$. Alle f_n seien in x_0 stetig. Es gelte

$$\exists \varepsilon > 0:\ \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in U_\varepsilon(x_0)} |f_n(x)| < \infty.$$

Zeigen Sie, dass

$$g : U_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{C}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

stetig in x_0 ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^3}$$

eine differenzierbare Funktion ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz, angewandt auf Real- und Imaginärteil (warum aufgespalten?).

13.4 Von einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$f(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 + o(x^3) \text{ für } x \to 0.$$

(a) Zeigen Sie

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ für } x \to 0$$

und finden Sie (mit Begründung) $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\log(1 + f(x)) = ax + bx^2 + o(x^2) \text{ für } x \to 0.$$

(b) Zeigen Sie

$$\arctan(x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3) \text{ für } x \to 0$$

und finden Sie (mit Begründung) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\arctan(f(x)) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + o(x^3) \text{ für } x \to 0.$$

13.5 (a) Man zeige für eine jede Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und alle $\beta > 0$ für $x \downarrow 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{1 + O(x^\beta)} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = 1 + O(x^\beta), \\ f(x) = \sqrt{1 + o(x^\beta)} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = 1 + o(x^\beta) \end{aligned}$$

(b) Sei $y = \cosh x$, $x > 0$. Zeigen Sie, dass es $\varepsilon > 0$ und Konstanten $C, C' > 0$ gibt, so dass für alle $x \in]0, \varepsilon[$ gilt:

$$C(y-1) \leq x^2 \leq C'(y-1)\,.$$

(c) Man finde (mit Beweis) ein $\alpha > 0$, für das für $y \downarrow 1$ gilt:

$$\operatorname{arcosh} y = \sqrt{2y-2} + O((y-1)^\alpha),$$

aber *nicht*

$$\operatorname{arcosh} y = \sqrt{2y-2} + o((y-1)^\alpha).$$

13.6 Berechnen Sie

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$

mit Hilfe von Treppenfunktionen, also ohne den Hauptsatz zu benutzen.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 28.01.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.