Übungen zur Analysis 1

12.1 Wir betrachten eine Masse m die an einer horizontalen Feder der Härte k in einer Flüssigkeit mit Reibungskoeffizient μ befestigt ist (alle Konstanten sind größer als 0). Die Auslenkung der Masse aus der Ruhelage in Abhängigkeit von der Zeit $t \in \mathbb{R}$ sei $x(t)$. Die Funktion $x(t)$ unterliegt der Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller komplexen Lösungen dieser Gleichung einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ bildet.

(b) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ Lösungen dieser Differentialgleichung. In welchem Fall findet man mit diesem Ansatz zwei *reelle* Lösungen (1. Fall), in welchen Fall zwei nicht-reelle komplexe Lösungen (2. Fall), und in welchem Fall nur eine Lösung (3. Fall)?

(c) Bestimmen Sie im 1. und 2. Fall zwei $\mathbb{C}$-*linear unabhängige reelle* Lösungen.
Hinweis: Linearkombinationen.

(d) Skizzieren Sie diese beiden reellen Lösungen im 1. und 2. Fall qualitativ und beschreiben Sie den Unterschied qualitativ. Welcher Fall gehört zu "starker Reibung", welcher zu "schwacher Reibung"?

12.2 (a) Bestimmen Sie eine Funktion $f(x)$, so dass $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $f(x)$, so dass $f'(x) = \tan(x)$.

12.3 Beweisen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Lipschitz-stetig ist

(a) durch direktes Abschätzen ohne Verwendung der Differentialrechnung;

(b) mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

Ist f gleichmäßig stetig?

12.4 Es sei $f(x) = \tanh(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die Formel

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad x \in]-1,1[,$$

für die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \operatorname{artanh}(x)$ von $f(x)$. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} sowohl aus dieser expliziten Formel als auch aus der allgemeinen Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Überprüfen Sie, dass beide Ergebnisse übereinstimmen.

12.5 Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-fach stetig differenzierbare Funktion (d.h. die iterierten Ableitungen $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ von f bis zur n-ten Stufe existieren und sind stetig). Es sei $f^{(j)}(0) = 0$ für $j = 0, \ldots, n-1$, wobei $f^{(0)} = f$ und $f^{(j+1)} = (f^{(j)})'$.

Beweisen Sie: $f(x) = O(|x|^n)$ für $x \to 0$.

Verwenden Sie dazu Mittelwertsatz der Differentialrechnung in einem Induktionsbeweis.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 21.01.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.