Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 11
7.1.2013

Übungen zur Analysis 1

11.1 Zeigen Sie:

(a) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$ für $x \to 0$.

(b) $\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$ für $x \to 0$.

(c) $\frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{x}{4} + o(x)\right)$ für $x \to 0$.

11.2 Erinnern Sie sich an die Hierarchie wachsender Folgen

$$1 \ll \log\log n \ll \log n \ll n^\alpha \ll n^\beta \ll e^{\gamma n} \ll e^{n^2} \ll e^{e^n} \qquad \text{für } n \to \infty$$

(wobei $\alpha < \beta$ und $\gamma > 0$). Ordnen Sie nachstehende Folgen (mit Beweis) in diese Hierarchie ein, so gut Sie es können:

(a) $a_n = \binom{2n}{n}$,

(b) $b_n = n!$.

11.3 Für $k \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Funktion

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^k \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$

(a) f_{2n} an der Stelle $x = 0$ n-mal differenzierbar und die n-te Ableitung unstetig ist. (Im Fall $n = 0$ meinen wir mit der 0-ten Ableitung f_0 selbst.)

(b) f_{2n+1} an der Stelle $x = 0$ n-mal, aber nicht $(n+1)$-mal, differenzierbar und die n-te Ableitung stetig ist. (Im Fall $n = 0$ meinen wir mit der 0-ten Ableitung f_1 selbst.)

11.4 (a) Es sei $f(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = 2(e^x + e^{-x})^{-1}$ für $x > 0$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f unter Verwendung elementarer Funktion wie Logarithmus und Quadratwurzel. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} sowohl aus dieser expliziten Formel als auch aus der allgemeinen Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Überprüfen Sie, dass beide Resultate übereinstimmen.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $f(x)$, so dass $f'(x) = \frac{1}{1+4x^2}$.

(c) Bestimmen Sie eine Funktion $f(x)$, so dass $f'(x) = \frac{\cos(x)}{1+\frac{1}{2}\sin(x)}$.

11.5 Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ ist gleichmäßig stetig.

11.6 Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in \mathbb{R}$ stetige Funktion und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in $y_0 := f(x_0) \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, sowie $h = g \circ f$. Zeigen Sie *direkt* mit der ϵ-δ-Definition der Stetigkeit, dass h in x_0 stetig ist. Achten Sie dabei besonders auf eine korrekte logische Argumentation im Umgang mit Quantoren.

11.7 *(Wiederholungsaufgabe zum Stoff der Probeklausur)*

(a) Beweisen Sie nur unter Verwendung der Definition von Konvergenz, d.h. mit einem ϵ-m-Argument, dass

$$\lim_{n\to\infty} e^{(-1+i)n} = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n(k^2+n^2)} = 0.$$

Überprüfen Sie insbesondere, dass die Voraussetzungen des Satzes über die dominierte Konvergenz erfüllt sind.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 14.1.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.