Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 10
17.12.2012

Übungen zur Analysis 1

Sinus, Cosinus und die Kreiszahl π

Bei diesem Übungsblatt sollen Sie nichts über trigonometrische Funktionen oder über π als bekannt voraussetzen.

10.1 Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\cos x := \operatorname{Re} e^{ix},$$
$$\sin x := \operatorname{Im} e^{ix}.$$

Insbesondere gilt die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

(a) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Zur Notation: $\cos^k x$ steht für $(\cos x)^k$.

(b) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$
$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(c) Zeigen Sie $\cos 2 < 0$. *Hinweis:* Zeigen Sie die Formel

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!} \left(\frac{x^2}{(4m+3)(4m+4)} - 1 \right)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und überlegen Sie sich, dass für $x = 2$ alle Summanden der letzten Reihe negativ sind.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge

$$N = \{x \in [0,2] |\ \cos x = 0\}$$

nichtleer und kompakt ist. Insbesondere besitzt N ein Minimum.
Hinweis: Verwenden Sie dazu die Stetigkeit der Cosinusfunktion.

(e) Wir definieren die Kreiszahl

$$\pi := 2 \min N.$$

Insbesondere gilt $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Zeigen Sie $0 < \pi < 4$.

(f) Zeigen Sie $\sin x > 0$ für alle $x \in]0, 2]$. *Hinweis:* Zeigen Sie die Formel

$$\sin x = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m}}{(4m+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und überlegen Sie sich, dass hierin für $0 < x \leq 2$ alle Summanden positiv sind.

(g) Folgern Sie $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$ und $e^{2\pi i k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht injektiv.

(h) Zeigen Sie, dass $e^{z+i\pi} = -e^z$ und $e^{z+2\pi i} = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Folgern Sie $\cos(2\pi + x) = \cos x$, $\sin(2\pi + x) = \sin x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$ und $\sin(\pi + x) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie: $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi$, und $\sin x < 0$ für $\pi < x < 2\pi$. Folgern Sie, dass für alle $x \in]0, 2\pi[$ gilt: $e^{ix} \neq 1$.

(j) Zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{R} : (e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}).$$

(k) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ix}$ das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf den Halbkreis

$$\{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1 \text{ und } \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

und das Intervall $[0, 2\pi[$ bijektiv auf den Einheitskreis

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$$

abbildet.

(l) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z},$$
$$e^z \neq 0,$$
$$e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

(m) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjektiv ist.

(n) Versuchen Sie, sich die komplexe Exponentialfunktion anschaulich vorzustellen, indem Sie das Bild $\exp[R]$ des Rechtecks $R = [-1, 1] + i[-\pi, \pi]$ und die Bilder $\exp[G_n]$, $\exp[H_n]$ der Gitterlinien $G_n = n/4 + i[-\pi, \pi]$ und $H_n = [-1, 1] + n\pi i/4$ darin für $n = -4, -3, \ldots, 4$ qualitativ skizzieren.

Zusammenfassung: Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{C}, +)$ nach $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ mit dem Kern $2\pi i\mathbb{Z}$. Sie bildet die imaginäre Achse $i\mathbb{R}$ surjektiv auf den Einheitskreis S^1 ab.

Das Analysis-Team wünscht Ihnen geruhsame Feiertage und einen guten Start ins neue Jahr!

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 7.1.2013, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.