MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 9
10.12.2012

Übungen zur Analysis 1

9.1 Wenden Sie *direkt* die ϵ–δ–Definition der Stetigkeit in einem Punkt an, um zu zeigen, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|}$$

stetig in 0 ist.

9.2 Es sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und $f : M \to M$ stetig. Wir wählen $x_0 \in M$ und setzen rekursiv $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gegen einen Punkt $x \in M$, dann gilt $f(x) = x$.

9.3 (a) **Das Lemma von Fatou für Reihen.** Es sei $(a_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ eine Doppelfolge mit Werten in $[0, +\infty]$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \liminf_{i\to\infty} a_{n,i} \leq \liminf_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,i}$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu die Doppelfolge $(\inf_{j\geq i} a_{n,j})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ und wenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz an.

(b) *Typische Anwendung des Lemmas von Fatou:* Es sei $(a_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ eine Doppelfolge mit Werten in $\mathbb{C}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Grenzwert $b_n = \lim_{i\to\infty} a_{n,i}$ in $\mathbb{C}$ existiert. Zeigen Sie:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |b_n|^2 \leq \liminf_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_{n,i}|^2 \leq \sup_{i\in\mathbb{N}_0} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_{n,i}|^2$$

(c) Zeigen Sie an Hand von je einem Beispiel, dass unter der Voraussetzung in (a) jede der drei folgenden Ungleichungen auftreten kann:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \liminf_{i\to\infty} a_{n,i} < \liminf_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,i},$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \limsup_{i\to\infty} a_{n,i} < \limsup_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,i},$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \limsup_{i\to\infty} a_{n,i} > \limsup_{i\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,i}.$$

9.4 (a) Es seien $M, N, U \subseteq \mathbb{C}$ mit $M \cup N = U$. Die Mengen M und N seien in U abgeschlossen. Zeigen Sie, dass eine Menge $V \subseteq U$ genau dann offen in U ist, wenn $V \cap M$ offen in M und $V \cap N$ offen in N ist.

(b) Wie eben sei $U = M \cup N \subseteq \mathbb{C}$, und M und N seien in U abgeschlossen. Weiter sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, deren Einschränkungen auf M und N stetig sind. Zeigen Sie: f ist stetig.

(c) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $(M_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von U mit in U offenen Mengen $M_i \subseteq U$. Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, so dass für alle $i \in I$ die Einschränkung $f_i : M_i \to \mathbb{C}$, $f_i(z) = f(z)$, von f auf M_i stetig ist. Zeigen Sie, dass f stetig ist. Folgern Sie, dass die Aussage in (b) richtig bleibt, wenn man dort das Wort "abgeschlossen" durch "offen" ersetzt.

(d) *Typische Anwendung von (b):* Gegeben seien $U \subseteq \mathbb{C}$ und zwei stetige Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Mengen $M := \{x \in U |\ f(x) - g(x) \leq 0\}$ und $N := \{x \in U |\ f(x) - g(x) \geq 0\}$ abgeschlossen in U sind. Folgern Sie, dass die Abbildung $f \wedge g : U \to \mathbb{R}$, $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ stetig ist.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 17.12.2012, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.