Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 8
3.12.2012

# Übungen zur Analysis 1

**8.1** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} 9^{-n}$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2(-1)^n}{2^{n-1}}$.

Berechnen Sie in c) die Summe, falls die Reihe konvergiert.

**8.2** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}.$$

**8.3** Berechnen Sie $e = \exp(1)$ näherungsweise mit einem Fehler vom Betrag kleiner als $10^{-6}$ – mit Beweis!

**8.4** Zeigen Sie

$$\forall \lambda > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \quad \lim_{n\to\infty} n^k \exp(-\lambda n) = 0.$$

Verwenden Sie dazu *nicht* die Aufgabe 6.1, sondern zeigen Sie zunächst

$$\forall \lambda > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \quad n^k \le \frac{1}{n} \lambda^{-k-1} (k+1)! e^{\lambda n}.$$

**8.5** Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in $x$ mit Konvergenzradius $r > 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |x_n| < r$. Zeigen Sie:

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Imitieren Sie dazu den Beweis des Spezialfalls $f = \exp$ aus der Zentralübung.

**8.6** **Änderung des Entwicklungspunkts bei Potenzreihen.** Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in $x$ mit komplexen Koeffizienten $a_n$ und Konvergenzradius $r > 0$. Weiter seien $y, z \in \mathbb{C}$ mit $|y| + |z| < r$ gegeben. Beweisen Sie:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{k+l}{k}|a_{k+l}y^l z^k| < \infty.$

(b) Folgern Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

in $z$ mit den Koeffizienten

$$b_k := \sum_{l=0}^{\infty}\binom{k+l}{k} a_{k+l}y^l$$

mindestens den Konvergenzradius $r - |y|$ besitzt, und dass für $x := y + z$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

**Abgabe:** Bis spätestens Montag, den 10.12.2012, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.