Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 6
19.11.2012

Übungen zur Analysis 1

6.1 Beweisen Sie für alle $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$n^k a^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

6.2 Berechnen Sie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)(m+2)}$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Partialbruchzerlegung, d.h., bestimmen Sie A, B, $C \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{1}{m(m+1)(m+2)} = \frac{A}{m} + \frac{B}{m+1} + \frac{C}{m+2}$.

6.3 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq m} a_n$$

(Zur Schreibweise: Das Infimum einer Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ bezeichnet man oft mit $\inf_{m\in\mathbb{N}} b_m$ statt mit $\inf\{b_m |\ m \in \mathbb{N}\}$. Weiter steht $\sup_{n\geq m} a_n$ für $\sup\{a_n |\ n \geq m\}$.)

6.4 Das Heron-Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln. Gegeben $a, b \in \mathbb{R}^+$, definieren wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}^+$ rekursiv wie folgt:

$$x_0 := b, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter sei $\Delta_n := x_n - \sqrt{a}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie:

(a)
$$\forall n \in \mathbb{N}_0 :\ \Delta_{n+1} = \frac{\Delta_n^2}{2x_n}$$

(b) Folgern Sie $\Delta_n \geq 0$, $\Delta_{n+1} \leq \frac{1}{2}\Delta_n$ und $\Delta_{n+1} \leq \frac{\Delta_n^2}{2\sqrt{a}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Falls $\Delta_0 \geq 0$, gelten die Schranken auch für $n = 0$.)

(c) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

(d) Nun sei speziell $a = b = 2$. Verwenden Sie die Schranke $0 \leq \Delta_0 \leq 1$, also $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ zusammen mit den Schranken aus c), um ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\Delta_n < 10^{-6}$ explizit anzugeben. Berechnen Sie x_n für dieses n explizit, z. B. mit dem Taschenrechner (Taschenrechnergenauigkeit genügt).

6.5 Beweisen Sie, dass $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

6.6 Gegeben sei eine Menge M, versehen mit einer Topologie $\mathcal{T}$ darauf, so dass M kompakt ist. Es sei weiter $A \subseteq M$ abgeschlossen, d.h. $M \setminus A \in \mathcal{T}$. Beweisen Sie, dass A kompakt ist.
(In dieser Aufgabe wird von einem allgemeinen topologischen Raum gesprochen, nicht von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Insbesondere ist abgeschlossen so definiert wie oben angegeben.)

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 26.11.2012, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.