MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 5
12.11.2012

Übungen zur Analysis 1

5.1 Stereographische Projektion. Wir betrachten die Ebene

$$E = \{(a, b, 0)|\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

und die Kugeloberfläche

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3|\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

im Raum $\mathbb{R}^3$. Der Punkt $N = (0, 0, 1) \in S^2$ bezeichne den "Nordpol". Gegeben ein Punkt $P = (a, b, 0) \in E$, sei PN die Gerade durch P und N; sie wird durch

$$PN = \{(1 - t)N + tP|\ t \in \mathbb{R}\},$$

parametrisiert. Die stereographische Projektion $f(a + ib)$ von $a + ib \in \mathbb{C}$ ist der von N verschiedene Schnittpunkt der Geraden PN mit der Kugel S^2. Weiter setzen wir $f(\infty) = N$.

(a) Beweisen Sie die in der Vorlesung angegebene Formel für $f(a + ib)$, indem Sie alle $t \in \mathbb{R}$ mit $(1 - t)N + tP \in S^2$ bestimmen.

(b) Geben Sie (mit Beweis) die Umkehrabbildung $f^{-1} : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ der stereographischen Projektion $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^2$ explizit an.

5.2 Es seien $M \subseteq \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Der Punkt x ist genau dann ein innerer Punkt von M, wenn M eine Umgebung von x enthält.

(b) Der Punkt x ist genau dann ein Berührpunkt von M, wenn jede Umgebung von x auch M trifft.

(c) Der Punkt x ist genau dann ein Randpunkt von M, wenn jede Umgebung von x sowohl M als auch $\mathbb{C} \setminus M$ trifft.

5.3 Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ und U offen.

(a) Beweisen Sie: $U \cap \overline{V} \subseteq \overline{U \cap V}$.

(b) Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass die Voraussetzung "U offen" nötig ist.

5.4 Kehrwertabbildung in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Es sei $k : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $k(z) := 1/z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k(0) := \infty$, $k(\infty) := 0$. Beweisen Sie für alle $A \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dass A genau dann offen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist, wenn ihr Bild $k[A]$ offen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist.

5.5 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Wie im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß sei

$$K = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{N}\, \forall n > m : a_n \geq x\}.$$

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $\sup K$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Zeigen Sie: $\sup K$ ist der *kleinste* Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.6 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in einer Menge $B \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die keinen Häufungspunkt in B besitzt. Zeigen Sie, dass B nicht kompakt ist.

Hinweis: Imitieren Sie den Beweis aus der Vorlesung der Aussage

$$\forall B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ kompakt} \Rightarrow B \text{ folgenkompakt}.$$

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 19.11.2012, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.