Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 4
5.11.2012

Übungen zur Analysis 1

4.1 Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = (1+i)^8$$

(a) direkt in der Darstellung mit Real- und Imaginärteil,

(b) unter Verwendung der Polardarstellung.

4.2 Zeigen Sie, dass das Bild $f[K]$ der punktierten Einheitskreislinie

$$K := \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = 1, z \neq -1\}$$

unter der Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$$

die imaginäre Achse $i\mathbb{R} = \{iy |\ y \in \mathbb{R}\}$ ist. Folgern Sie daraus den Satz des Thales: *Ein Dreieck ist rechtwinklig, wenn sich zwei Ecken auf dem Umkreis gegenüber liegen.*

4.3 Es sei $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau zwei Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^2 = z$ gibt. Drücken Sie Real- und Imaginärteil dieser „komplexen Quadratwurzeln" von z mittels reeller arithmetischer Operationen und reeller Quadratwurzelbildung in Abhängigkeit von a und b aus. Unterscheiden Sie wenn nötig mehrere Fälle.

4.4 Es sei $V \subseteq \mathbb{C}$. Beweisen Sie:

(a) V ist offen $\Leftrightarrow V \cap \partial V = \emptyset$

(b) V ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \partial V \subseteq V$

(c) ∂V ist abgeschlossen.

4.5 Zeigen Sie, dass die Menge der abbrechenden Dezimalbrüche

$$D = \{10^{-n}k |\ k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}_0\}$$

dicht in $\mathbb{R}$ ist, d.h. dass $\overline{D} = \mathbb{R}$ gilt.

4.6 $(*)$ Es sei r eine *irrationale* Zahl, d.h. $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$x_n = rn - \lfloor rn \rfloor.$$

Beweisen Sie:

$$\sup\{x_n |\ n \in N_0\} = 1.$$

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 12.11.2012, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.