Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 3
29.10.2012

Übungen zur Analysis 1

3.1 Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften reeller Zahlen direkt aus den Axiomen der reellen Zahlen:

(a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (b < c \Rightarrow a + b < a + c)$

(b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a > 0 \wedge b < c \Rightarrow a \cdot b < a \cdot c)$

(c) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ : (b < c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a}{c})$, wobei $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\}$ und $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.2 Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir

$$A + B := \{a + b |\ a \in A \wedge b \in B\},$$
$$AB := \{a \cdot b |\ a \in A \wedge b \in B\}.$$

Beweisen Sie:

(a) Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, so ist auch $A + B$ nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B).$$

(b) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^+$ nichtleer und nach oben beschränkt, so ist auch AB nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt

$$\sup A \cdot \sup B = \sup(AB).$$

3.3 Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$a_m := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}.$$

Weiter sei

$$A := \{a_m |\ m \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A nach oben beschränkt ist. *Hinweis*: Die Ungleichung

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ kann Ihnen dabei helfen.

(b) Geben Sie (mit Beweis) ein $m \in \mathbb{N}$ explizit an, für das

$$a_m < \sup A < a_m + \frac{1}{10}$$

gilt. Berechnen Sie a_m für dieses m explizit, z.B. mit dem Taschenrechner.
Bemerkung: Es gilt $\sup A = \pi^2/6$. Um das zu beweisen, braucht man Werkzeuge, die wir jetzt noch nicht bereitgestellt haben.

3.4 Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$, dass gilt:

$$\inf\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = 0$$

Hinweis: Verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung und das Archimedische Axiom.

3.5 Dezimaldarstellung.
Definition. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \le r < z + 1$. Dieses z wird mit $\lfloor r \rfloor$ bezeichnet und ganzzahliger Anteil *oder auch* Gaußklammer *von r genannt. Dabei bezeichnet*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der ganzen Zahlen.

Es sei $b = 10$. Für gegebenes $x \in [0, 1[$, d.h. $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \le x < 1$, definieren wir rekursiv zwei Folgen $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$y_0 := x, \quad d_{n+1} := \lfloor b y_n \rfloor, \quad y_{n+1} = b y_n - d_{n+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter setzen wir

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} d_k b^{-k}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$d_{n+1} \in \{0, \ldots, b - 1\}$$

und $y_n \in [0, 1[$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$x_n \le x < x_n + b^{-n}.$$

(c) Folgern Sie:

$$\sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = x.$$

(d) Zeigen Sie, dass für jede weitere Folge $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in der Menge $\{0, \ldots, b-1\}$ und für

$$x'_n := \sum_{k=1}^{n} d'_k b^{-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gilt: Wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$x'_n \le x < x'_n + b^{-n}$$

gilt, dann folgt $d_n = d'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.6 Quadratwurzeln. *Bei dieser Aufgabe sollen Sie weder die Existenz von Quadratwurzeln noch Eigenschaften von Quadratwurzeln als bekannt voraussetzen.*
Beweisen Sie:

(a) Für alle $a > 0$ ist die Menge $Q(a) := \{x > 0 |\ x^2 < a\}$ nichtleer und nach oben beschränkt.

(b) Setzt man $\sqrt{a} := \sup Q(a)$ für alle $a > 0$, so gilt $\sqrt{a} > 0$ und $\sqrt{a}^2 = a$.

(c) Es gilt $\sqrt{a^2} = a$ für alle $a > 0$.

(d) Für alle $a > 0$ und $b > 0$ gilt $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 5.11.2012, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.