

Übungen zur Analysis 1

2.1 Beweisen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^m (a + nb) = (m+1)(a + mb/2)$$

2.2 Beweisen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{n=1}^m \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2+m}{2^m}$$

2.3 Wir definieren rekursiv für $k \in \mathbb{N}$:

$$p_0(k) := k, \\ p_n(k) := \frac{1}{n+1} \left[k^{n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} p_j(k) \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Berechnen Sie $p_1(k)$, $p_2(k)$ und $p_3(k)$.
- (b) Beweisen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$p_2(k) = \sum_{l=0}^{k-1} l^2$$

- (*) Oder beweisen Sie allgemein für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$p_n(k) = \sum_{l=0}^{k-1} l^n$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie die Binomische Formel.)

2.4 (*) Die Addition $+$: $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ auf den natürlichen Zahlen sei wie in Aufgabe 1.1 rekursiv definiert. Beweisen Sie damit durch vollständige Induktion:

- (a) Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$ gilt $a + b = b + a$ (*Kommutativgesetz*).
- (b) Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*Assoziativgesetz*).

Achten Sie dabei besonders auf eine logisch korrekte Darstellung der Beweise! Geben Sie bei den Induktionsbeweisen genau an, inklusive aller Quantoren, welche Aussage induktiv bewiesen wird und wie die Induktionsvoraussetzung lautet.

2.5 Die Fibonacci-Zahlen f_n , $n \in \mathbb{N}_0$, sind rekursiv wie folgt definiert: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir kürzen ab:

$$\omega_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \omega_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Beobachten Sie $\omega^2 = \omega + 1$ für $\omega \in \{\omega_+, \omega_-\}$. Beweisen Sie damit für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega_+^n - \omega_-^n)$$

2.6 Beweisen Sie, dass jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ein minimales Element besitzt, d.h.

$$\forall M \subseteq \mathbb{N} : (M \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in M \forall m \in \mathbb{N} : (m < n \Rightarrow m \notin M)).$$

Hinweis: Beweisen Sie das durch Kontraposition. Nehmen Sie also an, M besitze kein minimales Element, und folgern Sie $M = \emptyset$.

2.7 *Der Philosoph, der tritt herein*

Und beweist Euch, es müßt so sein:

Das Erst wär so, das Zweite so,

Und drum das Dritt und Vierte so;

Und wenn das Erst und Zweit nicht wär,

Das Dritt und Viert wär nimmermehr.

Goethe, Faust I

Zeigen Sie, dass die hier bewiesene Aussage

$$[A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_3 \wedge A_4] \wedge [\neg(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow \neg(A_3 \wedge A_4)]$$

äquivalent zu folgender Aussage ist:

$$A_1 \wedge A_2 \Leftrightarrow A_3 \wedge A_4$$

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 29.10.2012, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten.