Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Franz Merkl

Wintersemester 2012/13
Blatt 1
15.10.2012

Übungen zur Analysis 1

1.1 Es sei $N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die Nachfolgerfunktion auf den natürlichen Zahlen. Wir setzen $1 := N(0)$, $2 := N(1)$, $3 := N(2)$ und $4 := N(3)$. Die Addition $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ und die Multiplikation $\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ werden rekursiv wie folgt definiert: Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\begin{aligned} n + 0 &:= n, \\ n + N(m) &:= N(n+m), \\ n \cdot 0 &:= 0, \\ n \cdot N(m) &:= n \cdot m + n. \end{aligned}$$

Beweisen Sie mit diesen Definitionen:

(a) $1 + 1 = 2$,

(b) $2 + 2 = 4$,

(c) $2 \cdot 2 = 4$.

1.2 Analysieren Sie untenstehenden Beweis, indem Sie an den mit $\boxed{*_i}$ gekennzeichneten Stellen jeweils angeben, welche Behauptung an dieser Stelle noch zu beweisen ist und welche relevanten Aussagen an dieser Stelle durch den vorhergehenden Teil des Beweises gegeben sind. Geben Sie auch an den mit (j) gekennzeichneten Stellen jeweils an, welche an dieser Stelle gegebenen Aussagen und welche allgemeinen Aussagen über reelle Zahlen hier implizit verwendet werden.

`Es gilt`

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x > 0\ \forall y > x : \big(y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon \big).$$

Beweis: $\boxed{*_1}$ `Es sei` $\varepsilon > 0$ `gegeben.` $\boxed{*_2}$ `Wir setzen` $\delta := \varepsilon^2 > 0$. $\boxed{*_3}$ `Nun sei` $x > 0$ `gegeben.` $\boxed{*_4}$ `Es sei weiter` y `mit` $y > x$ `gegeben.` $\boxed{*_5}$ `Es gelte` $y - x < \delta$. $\boxed{*_6}$ `Dann folgt`

$$\sqrt{y} + \sqrt{x} \overset{(1)}{\geq} \sqrt{y} \overset{(2)}{\geq} \sqrt{y - x}$$

`und damit`

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \overset{(3)}{=} \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \overset{(4)}{\leq} \frac{y - x}{\sqrt{y - x}} = \sqrt{y - x} \overset{(5)}{<} \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

`Das war zu zeigen. (6)` $\boxed{*_7}$

1.3 Es seien A, B und C Aussagen.

(a) Beweisen Sie, dass die Aussagen $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$ und B den gleichen Wahrheitswert besitzen. Formulieren Sie damit eine aussagenlogische Herleitungsregel (Beweisschema) für Fallunterscheidungen.

(b) Beweisen Sie $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C) \Rightarrow B \vee C$. Formulieren Sie damit eine aussagenlogische Herleitungsregel zum Beweis einer Disjunktion $B \vee C$ durch Unterscheidung der Fälle A und $\neg A$.

(c) Beweisen Sie $(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$. Formulieren Sie damit eine aussagenlogische Herleitungsregel zum Beweis von C (unter Voraussetzungen) durch Fallunterscheidung.

1.4 Die Potenzmenge einer Menge M wird durch

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

definiert. Stellen Sie die Potenzmengen

(a) $\mathcal{P}(\{0,1\})$ und

(b) $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\{0,1\})\big)$

in aufzählender Notation dar.

1.5 Es seien eine Indexmenge I und für jedes $i \in I$ eine Menge M_i gegeben. Die Vereinigung der Familie $(M_i)_{i \in I}$ wird durch

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists\, i \in I : x \in M_i\}$$

definiert. Wir bezeichnen die positiven rationalen Zahlen mit $\mathbb{Q}^+$.

Übersetzen Sie die Aussage

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} \{r \in \mathbb{Q}^+ \mid r > q\} = \mathbb{Q}^+$$

in eine prädikatenlogische Formel. Beweisen Sie anschließend diese Formel, wobei Sie elementare Eigenschaften von $\mathbb{Q}^+$ verwenden dürfen.

1.6 Griechisches Alphabet zum Einprägen:
α, A (Alpha), β, B (Beta), γ, Γ (Gamma), δ, Δ (Delta), ε, E (Epsilon), ζ, Z (Zeta), η, H (Eta), θ, Θ (Theta), ι, I (Jota), κ, K (Kappa), λ, Λ (Lambda), μ, M (My), ν, N (Ny), ξ, Ξ (Xi), o, O (Omikron), π, Π (Pi), ρ, P (Rho), σ, Σ (Sigma), τ, T (Tau), υ, Υ (Ypsilon), ϕ oder φ, Φ (Phi), χ, X (Chi), ψ, Ψ (Psi), ω, Ω (Omega)

Abgabe: Bis spätestens Montag, den 22.10.2012, 11:00 Uhr, durch Einwurf in den entsprechenden Übungskasten (neben der Bibliothek).