Übungen zu Analysis II für Statistiker

Vorbereitungsaufgaben:

V1 Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x^3 e^{x^2} \mathrm{d}x.$$

V2 Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Teilmengen M von X offen, abgeschlossen oder kompakt sind:

(a) $M = [1, 2) \subseteq X = \mathbb{R}$

(b) $M = [1, \infty) \subseteq X = \mathbb{R}$

(c) $M = (1, \infty) \subseteq X = \mathbb{R}$

(d) $M = \mathbb{N} \subseteq X = \mathbb{R}$

(e) $M = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq X = \mathbb{R}$

(f) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| > 0\} \subseteq X = \mathbb{R}^3$.

(g) $M = \{x^7 + 5y^2 + z : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \|(x, y, z)\| \leq 2\} \subseteq X = \mathbb{R}$.

(h) $M = \{e^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X = \mathbb{R}$

(i) $M = \{e^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq X = \mathbb{R}$

(j) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^7 + 5y^2 + z = 3\} \subseteq X = \mathbb{R}^3$.

(k) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^7 + 5y^2 + z > 3\} \subseteq X = \mathbb{R}^3$.

(l) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^7 + 5y^2 + z = 3 \text{ und } |z| \leq 2\} \subseteq X = \mathbb{R}^3$.

V3 Bestimmen Sie eine Lösung ϕ des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{y^2 + 1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0, y \in \mathbb{R}), \quad y(1) = 1.$$

Geben Sie dabei das größte Intervall I mit $1 \in I$ an, auf dem ϕ definiert ist und die Differenzialgleichung löst.

→ Seite 2

V4 Bestimmen Sie jeweils ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen der Differenzialgleichungen:

(a) $y''' - 7y' + 6y = 0$

(b) $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$

(c) $y''' - 4y'' + 13y' = 0$

(d) $y^{(4)} - y = 0$

In a) bestimmen Sie zusätzlich eine Lösung der DGL zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$, $y''(0) = 21$.

V5 Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

V6 Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy + z$, auf der Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| = \sqrt{3}\}$. Begründen Sie die einzelnen Schritte!

V7 Wir betrachten folgende Folgen von Funktionen:

(a) $f_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$.

(b) $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$.

(c) $f_n\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^2 \cos(\frac{1}{n})$.

Konvergieren diese gleichmäßig? Ändert sich etwas an dem Konvergenzverhalten, wenn wir den Definitionsbereich jeweils zu $[0, \infty)$ erweitern?

V8 Konvergieren die folgenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten?

(a) $x_n = (\frac{1}{n^2}, \sin(\frac{1}{n})) \in \mathbb{R}^2$

(b) $x_n = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\sin(n)) \in \mathbb{R}^2$

(c) $x_n = (\cos(n), \sin(n)) \in \mathbb{R}^2$

(d) $x_n = e^{-n}(\cos(n), \sin(n)) \in \mathbb{R}^2$