Übungen zu Analysis II für Statistiker

Tutoriumsaufgaben:

T1. Sei X eine Menge. Betrachte X als metrischen Raum mit der trivialen Metrik. Beschreiben Sie die offenen und abgeschlossenen Teilmengen in X.

T2. Wir betrachten die Teilmenge $Y := \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ Was ist ∂Y? Was ist $\overset{\circ}{Y}$? Was ist $\overline{Y}$?

T3. Seien X, Y metrische Räume, und sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann in $a \in X$ stetig ist, wenn es zu jeder Umgebung $V \subseteq Y$ von $f(a)$ eine Umgebung $U \subseteq X$ von a gibt mit $f(U) \subseteq V$.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann auf ganz X stetig ist, wenn Urbilder abgeschlossener Teilmengen von Y unter f wieder abgeschlossen sind.

→ Seite 2

Hausaufgaben:

H1. (4 Punkte) Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit den beiden durch die euklidische Norm $\|\cdot\|$ bzw. durch die Max-Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegebenen Metriken. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass A offen ist bezüglich $\|\cdot\|$ genau dann, wenn A offen ist bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

H2. (4 Punkte) Sei X ein metrischer Raum, und sei $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge.

(a) Zeigen Sie, dass $Y \subseteq X$ genau dann offen ist, wenn $Y \cap \partial Y = \emptyset$.

(b) Zeigen Sie, dass $Y \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $\partial Y \subseteq Y$.

H3. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum ist.

(Hinweis: Konvergiert eine Folge von stetigen Funktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion f, so ist f stetig – siehe Analysis 1, Satz 3.32)

H4. (4 Punkte) Betrachte den Folgenraum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Metrik aus Beispiel 1.6(d). Beschreiben Sie die offene Kugel

$$B_{2^{-n}}(0) := \Big\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \,:\, d\big((0)_{k\in\mathbb{N}}, (x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) < 2^{-n}\Big\},$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass diese auch abgeschlossen ist.

Abgabe: Bis Freitag, 12.5.17, 12:15.