MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2011/2012

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 12

Aufgabe 1

Berechnen Sie das Wegintegral über das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ x + z \\ y + z \end{pmatrix}$$

entlang einem geeigneten Weg, der den Ursprung des $\mathbb{R}^3$ mit einem beliebigen Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ verbindet und berechnen Sie den Gradienten der so erhaltenen Funktion. Bestimmen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses die Rotation von f, ohne diese explizit zu berechnen.

Aufgabe 2

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

(a) Überprüfen Sie, ob die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral über f entlang dem Einheitskreis um den Ursprung, bei einem vollen, positiven Umlauf und diskutieren Sie ihr Ergebnis im Hinblick auf das Ergebnis aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 3

Gegeben Sei die Funktion

$$f:[0,1]\times[0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x,\lambda)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{x^\lambda-1}{\ln(x)} & x\in(0,1)\\ \lambda & x=1\end{cases}$$

Zeigen Sie mithilfe der Methode der Ableitung unter dem Integral, dass der Wert des folgenden Parameterintegrals gegeben ist durch $\phi(\lambda):=\int_0^1 f(x,\lambda)\,dx=\ln(1+\lambda)$.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass f stetig und partiell nach der Variablen λ differenzierbar ist, berechnen Sie $\partial_\lambda f(x,t)$ und zeigen Sie, dass $\partial_\lambda f(x,t)$ ebenfalls stetig auf $[0,1]\times(0,\infty)$ ist. Argumentieren Sie nun, dass Ableitung und Integral auf dieser Domäne vertauschen. Berechnen Sie ϕ' und bestimmen Sie daraus die Funktion ϕ.

Abgabe: Dienstag, 31.1.2012 12 Uhr.