Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 9

Aufgabe 1

Entwickeln Sie $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^y$ bis zur zweiten Ordnung um den Punkt $(1, 1)$, d.h. berechnen Sie das Taylorpolynom $\mathscr{T}_2(f, (1, 1))(x, y)$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihenentwicklung von $f(x) = \ln(1 + x)$.

Aufgabe 3

Sei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ die Dreiecksfunktion, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $c_k(f)$ und geben Sie die Fourierreihe $S(f, x)$ an.

Ergebnis: $c_0(f) = \frac{1}{2}$, $c_k(f) = -\frac{2}{(k\pi)^2}$ für k ungerade und $c_k(f) = 0$ für $k \neq 0$ gerade.

(b) Zeigen Sie, dass $S_N(f, x)$ gleichmäßig konvergent ist.

(c) Geben Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ an.

(d) Beweisen Sie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Aufgabe 4

Seien $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, gegeben durch ihre Fourierreihen $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$ sowie $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(g)e^{ikx}$, wobei f und g so gewählt seien, dass $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(g)|$ existieren (das wird bei stetigen Funktionen, die stückweise differenzierbar sind, der Fall sein; vgl. Vorlesung).

Die *diskrete Faltung* der Fourierkomponenten $c_k(f)$ und $c_k(g)$ ist definiert durch

$$[c(f) * c(g)]_k := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)c_{k-n}(g)$$

Beweisen Sie den *diskreten Faltungssatz*, der besagt, dass die Fourierkomponenten des Produkts zweier Funktionen genau die diskret gefalteten Komponenten der einzelnen Funktionen sind:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [c(f) * c(g)]_k e^{ikx} \stackrel{!}{=} f(x)g(x)$$

Abgabe: Dienstag, 10.1.2012 12 Uhr.