Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema (Lage und Art) der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = e^5 + \frac{1}{10}(x^2 + y^2 - 35)e^{-x}$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = xy$ und $g(x,y) = x^2 + y^2$.

(a) Skizzieren Sie qualitativ in der x-y-Ebene die Niveaulinien $g(x,y) = 1$ und $f(x,y) = c$ für einige Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Überlegen Sie sich anhand der Skizze, für welche Punkte (x_0, y_0) ein c existiert, sodass die Niveaulinie $f(x,y) = c$ die Niveaulinie $g(x,y) = 1$ in (x_0, y_0) tangential berührt (also nicht schneidet!).

Bemerkung: In solchen Punkten werden die Gradienten von f und g parallel zueinander stehen (warum?).

(b) Betrachten Sie nun einen Punkt (x_0, y_0), sodass für ein c die Niveaulinie $f(x,y) = c$ die Niveaulinie $g(x,y) = 1$ in (x_0, y_0) schneidet (nicht nur berührt!). Argumentieren Sie, dass (x_0, y_0) kein lokales Extremum von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ sein kann.

Hinweis: Überlegen Sie sich anhand der Skizze, was mit den Werten von $f(x,y)$ passiert, wenn Sie sich entlang der Niveaulinie $g(x,y) = 1$ durch (x_0, y_0) bewegen.

(c) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Punkte (x_i, y_i), auf denen $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ lokale Extrema besitzt und vergleichen Sie Rechenweg und Ergebnis mit Ihren Überlegungen aus den Aufgabenteilen (a) und (b).

Aufgabe 3

Seien $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + 2y^2 = 9\}$ und $f : V \to \mathbb{R},\ \ f(x,y) = x^3 - y^3$. Bestimmen Sie Maximum und Minimum von f, sowie diejenigen Stellen in V, an denen das Maximum bzw. Minimum angenommen wird.

Hinweis: Da f stetig ist, und V kompakt, dürfen Sie voraussetzen, dass f in V ein Maximum bzw. Minimum besitzt.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren für einen dreidimensionalen Quader mit gegebenem Volumen V die Seitenlängen x, y, z so, dass die Oberfläche $O(x, y, z)$ minimal wird (vergleichen Sie mit Aufgabe 4 im letzten Blatt).

Abgabe: Dienstag, 13.12.2011 12 Uhr.