MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2011/2012

Übungen zur Analysis II

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 6

Aufgabe 1

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbare Vektorfelder und $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein total differenzierbares Skalarfeld. Wir notieren mit $\mathcal{D}_p(\varphi)$ die Jacobimatrix einer beliebigen total differenzierbaren Abbildung φ im Punkt p.

Sei $p \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie folgende *Produktregeln*:

(a)
$$\mathcal{D}_p(f\phi) = \mathcal{D}_p(f)\phi + f \cdot \operatorname{grad}\phi \ ,$$

beachten Sie hier, dass der Ausdruck $f \cdot \operatorname{grad}\phi$ als Produkt der $m \times 1$-Matrix f (als Vektor im $\mathbb{R}^m$) mit der $1 \times n$-Matrix $\operatorname{grad}\phi$ eine $m \times n$-Matrix ergibt (genauso wie $\mathcal{D}_p(f)$ und $\mathcal{D}_p(f)\phi$).

(b) Es bezeichne $< \cdot, \cdot >$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{D}_p(< f, g >) = f^T \cdot \mathcal{D}_p(g) + g^T \cdot \mathcal{D}_p(f) \ ,$$

mit den Zeilenvektoren f^T und g^T, die sich durch Transposition der m-dimensionalen Spaltenvektoren f und g ergeben.

(c) Sei $m = n$ und ∇ der Nabla-Operator im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{div}(f\phi) = \operatorname{div}(f)\phi + < f, \nabla > \phi$$

Aufgabe 2

Eine positiv homogene Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erfüllt für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\lambda > 0$ die Gleichung $f(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$.

Beweisen Sie die *Eulersche Homogenitätsrelation*:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ total differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ positiv homogen} \quad \Longleftrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) = < \boldsymbol{x}, \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) > \quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $< \cdot, \cdot >$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema (Lage und Art) der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für einen dreidimensionalen Quader mit gegebenem Volumen V die Seitenlängen x, y, z so, dass die Oberfläche $O(x, y, z)$ minimal wird.

Abgabe: Dienstag, 6.12.2011 12 Uhr.