MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. P. Pickl

WiSe 2011/12
18.02.11

Probeklausur zur Mathematik III für gymnasiales Lehramt

Nachname: .... Vorname:..........................

Matrikelnummer: ....

Geburtsdatum: ....

alte LPO ☐ neue LPO ☐.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Bitte beachten Sie:

(a) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**

(b) Arbeitszeit: 10:15 - 11:55 Uhr.

(c) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.

(d) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf das selbe Blatt!**

(e) Jede Aufgabe gibt die selbe Punktzahl.

(f) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1. (Nur modularisiert!)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = yx + x$. Begründen Sie, warum es keine weiteren Lösungen geben kann.

Aufgabe 2. (Nur modularisiert!)

Sei $\mathcal{C} \subset [0,1]$ die Cantormenge. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{C}$ ist eine Jordan Nullmenge.

(b) $\mathcal{C}$ ist überabzählbar.

Aufgabe 3. (Alle!)

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit Realteil $g = \mathrm{Re}(f)$ und Imaginärteil $h = \mathrm{Im}(f)$, $z = x + iy$. Zeigen Sie:

(a) Ist f holomorph und g, h zweimal stetig differenzierbare Funktionen in x und y, dann sind g und h *harmonische Funktionen*, d.h sie lösen die *Laplace-Gleichung*:

$$\triangle g = (\partial_x^2 + \partial_y^2)g = 0 \quad \text{und} \quad \triangle\, h = (\partial_x^2 + \partial_y^2)h = 0$$

(b) In diesem Fall stehen die Gradienten von g und h bezüglich der Basis $(1, i)$ in jedem Punkt $z \in U$ senkrecht aufeinander, d.h. es gilt

$$\langle \nabla g, \nabla h \rangle = 0, \quad \text{mit} \quad \nabla := \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$$

und dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4. (Alle!)

Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial \mathcal{B}_1(\frac{3}{2})} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz$$

Aufgabe 5. (Alle!)

Bestimmen Sie bei folgenden Funktionen die Art der Singularität in z_0. Falls ein Pol vorliegt, bestimmen Sie dessen Ordnung.

(a)
$$f(z) = \frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1}, \quad z_0 = i$$

(b)
$$f(z) = \frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1}, \quad z_0 = -i$$

(c)
$$f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z^4}, \quad z_0 = 0$$

Aufgabe 6. (Alle!)

Es sei $\mathcal{K}_{(r,R)}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ der Kreisring zwischen den Kreisen mit Mittelpunkt z_0 und Radius r bzw. R. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ in Laurentreihen, die jeweils in folgenden Kreisringen konvergieren:

(a) $\mathcal{K}_{(0,1)}(0)$

(b) $\mathcal{K}_{(1,2)}(0)$

(b) $\mathcal{K}_{(3,\infty)}(1)$

Aufgabe 7. (Nur Nichtmodularisiert!)

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Beweisen Sie, dass $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt, d.h. zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Aufgabe 8. (Nur Nichtmodularisiert!)

Berechnen Sie das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{5 + 4\,\sin\varphi}\, d\varphi$$

explizit mithilfe des Residuensatzes.