MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. P. Pickl

SoSe 2012
26.07.12

Klausur zur Mathematik IV für gymnasiales Lehramt
Nicht Modularisiert (alte LPO)

Nachname: .... Vorname:..........................

Matrikelnummer: ....

Geburtsdatum: ....

alte LPO ☒ neue LPO ☐.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Bitte beachten Sie:

(a) **Bitte tragen Sie auf jedem Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen ein!**

(b) Arbeitszeit: 16:15 - 17:55 Uhr.

(c) Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät.

(d) **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu verschiedenen Aufgaben auf das selbe Blatt!**

(e) Jede Aufgabe gibt die selbe Punktzahl.

(f) Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

Aufgabe 1.

Es sei $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = x^2 - y^2 + 5$. Finden Sie eine Funktion $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass $f(z) := f_1(x,y) + if_2(x,y)$, $z = x + iy$ komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 2.

Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{1+z^2}{z} dz \quad ,$$

wobei γ

(a) der Kreisbogen um die Null von 1 nach i in positivem Umlauf ist.

(b) der Kreisbogen um die Null von 1 nach i in negativem Umlauf ist, indem Sie die Cauchy-Integralformel und Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (a) verwenden.

Aufgabe 3.

Geben Sie die Laurentreihen (Entwicklungspunkt $z_0 = 0$) folgender Funktionen an und bestimmen Sie Hauptteil, Nebenteil und die Residuen.

(a) $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z}$

(b) $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$

Aufgabe 4.

Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$ mithilfe des Residuensatzes (achten Sie auf korrekte Argumentation bei der Diskussion des Beitrages des komplexen Kreisbogens im Unendlichen).

Aufgabe 5.

Berechnen Sie Konvergenzradien und jeweils die ersten Ableitungen der Potenzreihen von e^z, $\sin(z)$ und $\cos(z)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 6.

Zeigen Sie, dass jede ganze (d.h. in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbare) Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| < |z|^\alpha$ und $0 < \alpha < 1$ konstant ist, indem Sie $|f'(z)|$ mithilfe der Cauchy-Integralformel der ersten Ableitung geeignet abschätzen.

Hinweis: Wählen Sie für die Cauchy-Integralformel als Integrationsweg den Kreis von Radius R um z und lassen Sie am Ende R beliebig groß werden.