Tutoraufgaben

Aufgabe T1

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine unabhängige Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$-Verteilung, wobei $m \in \mathbb{R}$ fest und bekannt sei. Geben Sie das statistische Modell an und zeigen Sie, dass

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$$

ein gleichmäßiger bester erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist.

Aufgabe T2

Gegeben sind zwei (äußerlich nicht unterscheidbare) Urnen:

In der Urne H befinden sich 10 schwarze und 20 weiße Kugeln.
In der Urne K befinden sich 20 schwarze und 10 weiße Kugeln.

Es wird Ihnen nun eine der beiden Urnen gezeigt, und Sie sollen „erraten", um welche der beiden Urnen es sich handelt. Dazu dürfen Sie 5mal (ohne Zurücklegen) eine Kugel aus der Urne ziehen, wobei Sie natürlich nicht in die Urne hineinschauen dürfen / können. Aufgrund Ihrer Stochastik-Kenntnisse ist Ihnen natürlich klar, dass Sie die Situation als Testproblem mit der Hypothese H : „Urne H" und der Alternative K : „Urne K" ansehen können und dass Ihre Beobachtung durch eine Zufallsgröße X mit Werten in $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ modelliert werden kann, die die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln angibt.

(i) Geben Sie an, wie die Zufallsgröße X unter der Hypothese bzw. unter der Alternative verteilt ist.

(ii) Bei der „Mehrheitsregel" entscheidet man sich für H bzw. K, falls bei den gezogenen 5 Kugeln die schwarzen bzw. weißen Kugeln in der Minderheit sind. Berechnen Sie (mit Hilfe der nachfolgenden Tabelle) die Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. Art und 2. Art.

(iii) Geben Sie (mit Hilfe der nachfolgenden Tabelle) einen „optimalen" randomisierten Test zum Niveau 0.1 für H gegen K an. Erläutern Sie, in welchem Sinn der Test „optimal" ist.

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_H(\{x\})$	0.109	0.340	0.360	0.160	0.029	0.002
$\mathbb{P}_K(\{x\})$	0.002	0.029	0.160	0.360	0.340	0.109
$\frac{\mathbb{P}_K(\{x\})}{\mathbb{P}_H(\{x\})}$	0.016	0.087	0.444	2.250	11.536	61.524

Hausaufgaben

Aufgabe H1

Um bei Umfragen zu heiklen Themen („Nehmen Sie harte Drogen?") die Privatsphäre der befragten Personen zu schützen und zuverlässige Antworten zu bekommen, wurde das folgende

„Unrelated Question"-Befragungsmodell vorgeschlagen: Ein Stapel Fragekarten ist zur Hälfte mit der heiklen Frage A und zur anderen Hälfte mit einer harmlosen Frage B beschriftet, welche nichts mit Frage A zu tun hat („Waren Sie letzte Woche im Kino?"). Der Interviewer lässt den Befragten die Karten mischen, eine Karte verdeckt ziehen und die darauf gestellte Frage beantworten. Die untersuchte Personengruppe enthalte einen bekannten Anteil p_B der Personen, welche Frage B bejahen (Kinogänger). Sei $\theta = p_A$ die Wahrscheinlichkeit, mit der die heikle Frage A bejaht wird. Es werden n Personen unabhängig befragt. Präzisieren Sie das statistische Modell, geben Sie einen gleichmäßig besten erwartungstreuen Schätzer für θ an, und bestimmen Sie dessen Varianz.

Aufgabe H2

Sei $\mathbb{P}_0 = \mathcal{U}_{]0,2[}$ und $\mathbb{P}_1 = \mathcal{U}_{]1,3[}$.

(i) Bestimmen Sie einen besten Test für $H_0 : \mathbb{P} = \mathbb{P}_0$ gegen $H_1 : \mathbb{P} = \mathbb{P}_1$ zum Niveau $\alpha \in \,]0, 1/2[$.

(ii) Gibt es auch einen besten nicht-randomisierten Test für das Testproblem von (i)?

Aufgabe H3

In einer Sendung von 10 Geräten befindet sich eine unbekannte Anzahl fehlerhafter Geräte. Ein Fehler lässt sich jeweils nur durch eine sehr kostenspielige Qualitätskontrolle feststellen. Ein Abnehmer, der nur an einer völlig einwandfreien Lieferung interessiert ist, führt folgende Eingangskontrolle durch: Er prüft 5 Geräte. Sind diese alle einwandfrei, so nimmt er die Sendung an; andernfalls lässt er sie zurückschicken.
Beschreiben Sie das Vorgehen testtheoretisch und ermitteln Sie das effektive Niveau des Testverfahrens. Wie viele Geräte müssen überprüft werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Annahme der Sendung kleiner gleich 0.1 sein soll?

Aufgabe H4

Test der Funktionsdauer von Geräten. Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Stichprobe aus dem statistischen Modell $\big((0,\infty)^n, \mathcal{B}((0,\infty)^n), P_\theta^{\otimes n} : \theta > 0\big)$. Dabei bezeichne P_θ die Weibull-Verteilung mit bekannter Potenz $\beta > 0$ und unbekanntem Skalenparameter $\theta > 0$, also die Verteilung mit Dichte

$$f_\theta(x) = \theta\beta x^{\beta-1} e^{-\theta x^\beta} 1_{(0,\infty)}(x)\,.$$

Sie beschreibt den zufälligen Zeitpunkt, an dem ein Gerät defekt wird (siehe auch Aufgabe 3.27 im Buch von Georgii). Ihr Erwartungswert $\theta^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma(1+\frac{1}{\beta})$ fällt monoton in θ.
Zeigen Sie:

(i) Unter $P_\theta^{\otimes n}$ hat $\theta \sum_{i=1}^n X_i^\beta$ die Gamma-Verteilung $\Gamma_{n,1}$.

(ii) Sei $\theta_0 > 0$. Bestimmen Sie einen besten Niveau-α-Test φ für die Nullhypothese $H_0 : \theta \leq \theta_0$ („mittlere Lebensdauer überschreitet Minimalwert") gegen $H_1 : \theta > \theta_0$.

(iii) Sei nun $\theta_0 = 1$ und $\alpha = 0.01$. Finden Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes und Quantilen der Standardnormalverteilung ein $n \in \mathbb{N}$, so dass die Gütefunktion des Tests φ an der Stelle $\theta = 2$ einen Wert größer gleich 0.95 hat.

Abgabe der Hausaufgaben bis 26.01.2015, 12:15 Uhr, in den Übungskasten