Stochastik
Übungsblatt 12

Prof. Dr. Holger Kösters

Tutoraufgaben

Aufgabe T1

Sei $\mathcal{M} = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein einparametriges Standardmodell, dessen Parametermenge Θ ein offenes Intervall ist. Seien ferner eine messbare Abbildung $T : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, eine stetig differenzierbare Funktion $a : \Theta \to \mathbb{R}$ mit $a' \neq 0$ sowie messbare Abbildungen $b : \Theta \to \mathbb{R}$ und $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ gegeben.
$\mathcal{M}$ heißt ein *exponentielles Modell* und $(\mathbb{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ eine *exponentielle Familie* zum Schätzer T , wenn die Likelihood-Funktion durch

$$L_x(\vartheta) \;=\; h(x)\, e^{a(\vartheta)T(x)-b(\vartheta)}$$

gegeben ist.

(i) Finden Sie eine Abbildung T, so dass die Poisson-Verteilungen zum Parameter $\lambda > 0$ eine exponentielle Familie zu T bilden.

(ii) Sei $m \in \mathbb{R}$ fest und bekannt. Finden Sie eine Abbildung T, so dass $(\mathcal{N}_{m,\sigma^2} : \sigma^2 \in (0,\infty))$ eine exponentielle Familie zu T ist.

(iii) Sei $\mathcal{M}$ ein exponentielles Modell zu T und $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine Abbildung $T^{(n)}$, so dass das n-fache Produktmodell $\mathcal{M}^{\otimes n}$ ein exponentielles Modell zu $T^{(n)}$ ist.

Hausaufgaben

Aufgabe H1

(i) Sei $s^2 > 0$ fest und bekannt. Finden Sie eine Abbildung T, so dass $(\mathcal{N}_{\mu,s^2} : \mu \in \mathbb{R})$ eine exponentielle Familie zu T ist.

(ii) Untersuchen Sie, ob eine Abbildung T existiert, so dass $(\chi^2_n : n \in \mathbb{N})$ eine exponentielle Familie zu T ist.

(iii) Untersuchen Sie, ob eine Abbildung T existiert, so dass $(\mathcal{U}_{[0,\vartheta]} : \vartheta > 0)$ eine exponentielle Familie zu T ist.

(iv) Sei $\mathcal{M}$ ein exponentielles Modell wie in der Aufgabe T1. Es gelte $E_\vartheta[|T|] < \infty$ für alle $\vartheta \in \Theta$. Zeigen Sie, dass b auf Θ differenzierbar ist und die Ableitung $b'(\vartheta) = a'(\vartheta)E_\vartheta[T]$ besitzt.

Aufgabe H2

Wir betrachten für festes $n \in \mathbb{N}$ das statistische Modell

$$(\mathcal{X}, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}) = (\{0,\dots,n\}, \mathfrak{P}(\{0,\dots,n\}), (\mathcal{B}(n,p))_{p\in[0,1]})$$

aus der Vorlesung zur Schätzung der W. für „Kopf“ bei einer verbogenen Münze.

(i) Zeigen Sie, dass der durch $\widehat{p}_{ML}(x) := \frac{1}{n}x$ gegebene ML-Schätzer für p der einzige erwartungstreue Schätzer für p ist.
Hinweis: Sei $\widehat{p}$ ein beliebiger erwartungstreuer Schätzer und $\gamma := \widehat{p}_{ML} - \widehat{p}$. Überlegen Sie sich, dass die Funktion $p \mapsto \mathbb{E}_p\gamma$ ein Polynom in p sowie konstant gleich Null ist, und folgern Sie mittels Koeffizientenvergleich, dass $\gamma(x) = 0$ für alle $x = 0,\dots,n$.

(ii) Zeigen Sie: Es gibt keinen erwartungstreuen Schätzer für die Standardabweichung $\sigma(p)$ von $\mathcal{B}(n,p)$.

Aufgabe H3

Schätzung mit der Momentenmethode. Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathcal{X}$, $X : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ die Identität auf $\mathcal{X}$ und $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}, Q_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ ein statistisches Modell auf $\mathcal{X}$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\vartheta \in \Theta$ das k-te Moment $m_k(\vartheta) := E_\vartheta[X^k]$ von Q_ϑ existiert.

(ii) Sei $r \in \mathbb{N}$, $g : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ stetig und $\tau(\vartheta) := g(m_1(\vartheta), \dots, m_r(\vartheta))$. Im zugehörigen unendlichen Produktmodell $(\mathcal{X}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{\otimes\mathbb{N}}, Q_\vartheta^{\otimes\mathbb{N}} : \vartheta \in \Theta)$ ist dann bei beliebigem n

$$T_n := g\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2, \dots,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^r\Big)$$

ein Schätzer für τ, wobei $X_i : \mathcal{X}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ die Projektion auf die i-te Koordinate bezeichnet. Zeigen Sie: Die Folge (T_n) ist konsistent.

Aufgabe H4

Norwegische Forscher möchten herausfinden, wie lang der längste Wal ist. Dazu fangen sie rein zufällig einen Wal, messen dessen Länge und lassen ihn sofort wieder frei. Dies wiederholen sie unabhängig n mal. Die unbekannte Länge des längsten Wahl sei ϑ. Die Forscher nehmen an, dass die gemessenen Längen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und auf $[0, \vartheta]$ gleichverteilt sind. Nun streiten sie sich, wie man ϑ am Besten schätzen kann.

(i) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer ϑ_n^M für ϑ.

(ii) Modifizieren Sie ϑ_n^M so, dass der so entstehende Schätzer ϑ_n^* erwartungstreu ist.

(iii) Ein dritter möglicher Schätzer ist der doppelte Mittelwert $\tilde{\vartheta}_n := 2\bar{X}$. Ist er erwartungstreu?

(iv) Untersuchen Sie die Schätzer ϑ_n^M, ϑ_n^* und $\tilde{\vartheta}_n$ auf Konsistenz.

(v) Welcher dieser Schätzer ist hat den geringsten MSE?

Abgabe der Hausaufgaben bis 19.01.2015, 12:15 Uhr, in den Übungskasten