Stochastik
Übungsblatt 11

Tutoraufgaben

Aufgabe T1

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, exponentialverteilte Beobachtungen mit unbekanntem Parameter $\alpha > 0$, n eine natürliche Zahl.

(i) Schreiben Sie das statistische Modell zu dieser Situation auf. Welche der folgenden Zufallsvariablen ist ein Schätzer für α

$$\alpha^2 X_1, \qquad \frac{X_1 + \max_{1\le i\le n} X_i}{2}, \qquad \overline{X}, \qquad \frac{\alpha + \overline{X}}{2} \qquad ?$$

Dabei benutzen wir die Bezeichnung $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

(ii) Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für α bei einer Stichprobe der Größe n.

(iii) Berechnen Sie den Mean-Squared-Error (MSE) für die folgenden Schätzer von $\frac{1}{\alpha}$

$$T_1(X_1, \dots, X_n) = X_1 \qquad \text{und} \qquad T_2(X_1, \dots, X_n) = \overline{X}.$$

Aufgabe T2

Wiederholungsaufgabe: Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$. *Hinweis:* Es gilt: $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Hausaufgaben

Die folgenden Aufgaben haben den Charakter einer Probeklausur über den ***bisherigen*** *Stoff der Vorlesung. Wir empfehlen, die Aufgaben unter Klausurbedingungen (ohne Hilfsmittel) innerhalb von 120 Minuten zu lösen. Die Aufgaben sind im Wesentlichen alte Klausuraufgaben.*

Aufgabe H1

In einer Urne befinden sich 2 rote und 3 blaue Kugeln. Aus der Urne wird n-mal mit Zurücklegen gezogen und bei jedem Zug die Farbe der Kugel notiert. Dabei sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl.

(a) Stellen Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Zufallsexperiment auf und geben Sie an, wie ein Ergebnis $\omega \in \Omega$ zu interpretieren ist.

(b) Definieren Sie als Abbildung auf Ihrem Ergebnisraum aus (a) eine Zufallsvariable X, welche zählt, wieviele verschiedene Farben gezogen wurden und berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(c) Sind die Ereignisse $A = \{X = 1\}$ und $B =$ „Im ersten Zug wird eine rote Kugel gezogen" unabhängig?

Aufgabe H2

Für $a > 0$ bezeichne $f_a : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ die Abbildung mit

$$f_a(x) = a x^{-a-1} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass f_a eine Dichte ist.

(b) Im Folgenden sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f_a. Bestimmen Sie die Parametermenge $V \subset (0, \infty)$, sodass die Varianz von X genau dann existiert, wenn $a \in V$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Verteilung von

$$Y = \left(\frac{1}{X}\right)^a.$$

(d) Sei nun $a, b > 0$. Seien weiter X, Y unabhängige Zufallsvariablen, wobei X Dichte f_a und Y Dichte f_b habe. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X \leq Y$ gilt.

Aufgabe H3

(a) Formulieren Sie den Satz von Bayes.

(b) Zwei Urnen enthalten je eine rote, eine grüne und eine blaue Kugel. Anna und Tom führen folgendes zweistufiges Zufallsexperminent durch. Zunächst zieht Tom zufällig eine Kugel aus der ersten Urne und legt sie in die zweite Urne. Anschließend zieht Anna aus der gut gemischten zweiten Urne eine Kugel.

  (i) Geben Sie einen Ergebnisraum Ω an, der das Zufallsexperminent beschreibt, und interpretieren Sie ein $\omega \in \Omega$.

  (ii) Anna sieht, dass sie eine grüne Kugel gezogen hat. Gegeben diese Information, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tom ebenfalls eine grüne Kugel zog?

Aufgabe H4

(a) Formulieren Sie das 1. Lemma von Borel-Cantelli.

(b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $]0, 1[$ uniform verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ferner sei $\alpha > 1$.
Zeigen Sie: $\mathbb{P}$-fast sicher gilt

$$n^\alpha X_n \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty\,.$$

Aufgabe H5

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2$ und sei $\mu := E[X_1]$. Wir definieren $Y_n := X_n X_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu^2.$$

(b) Seien nun $X_1, X_2, \ldots$ standardnormalverteilt. Finden Sie reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass folgendes gilt:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{2i} - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0, 1)\,.$$

Aufgabe H6

In einer Fabrik werden von n Maschinen Bauteile produziert, wobei jede Maschine bei der Produktion eines Bauteils mit unbekannter Wahrscheinlichkeit $\theta \in (0, 1)$ durch einen Defekt unbrauchbar wird (unabhängig von den anderen Maschinen und von bisher produzierten Teilen). Für jede Maschine wird notiert, bei dem wievielten Bauteil ein Defekt aufgetreten ist.

(a) Stellen Sie ein statistisches Modell für dieses Experiment auf.

(b) Leiten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ her.

Abgabe der Hausaufgaben bis 12.01.2015, 12:15 Uhr, in den Übungskasten